

Bağıntı ve Fonksiyonlar Konusunda Yapılan Yaygın Hataların Belirlenmesi
ve Giderilmesi Üzerine Boylamsal Bir Çalışma

A Study about the Elimination of Pre-Service Primary Education Teachers'
Misconceptions about Relations and Functions Concepts

Zeynep Sonay POLAT*, Yeter ŞAHİNER**
Hacettepe Üniversitesi Atılım Üniversitesi

Öz

Bu çalışma boylamsal bir çalışmadır. Araştırmanın birinci basamağı, 2004-2005 öğretim yılında Hacettepe Üniversitesi Sınıf Öğretmenliği Bölümü'nde birinci sınıfta okumakta olan 190 öğrenci üzerinde uygulanmıştır. Bu aşamada, öğrencilerin bağıntı ve fonksiyonlar konusunda yaptıkları yaygın hatalar belirlenmiş, sınıflandırılmış ve bu hataların temelinde yatan nedenler araştırılmıştır. Araştırmanın ikinci basamağı, 2005-2006 öğretim yılında aynı üniversitenin aynı bölümünde ve yine birinci sınıfta okumakta olan 97 öğrenci ile yürütülmüştür. Bu aşamada, "Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin fonksiyonlar konusunda yaptıkları yaygın hatalar giderilebilir mi?" sorusuna yanıt aranmaktadır. Çalışmanın sonuçları, birinci aşamada saptanan yaygın hatalar dikkate alınarak hazırlanmış olan ders içeriği, dersin işleniş planı ve kullanılan metot ile hataların büyük ölçüde giderildiğini göstermiştir.

Anahtar Sözcükler: Bağıntı ve fonksiyon, yaygın hatalar, öğretmen adayları.

Abstract:

The present study was a longitudinal study. The first step of the research was conducted during 2004-2005 academic year with 190 preservice teachers attending to their first year at Hacettepe University Primary Education department. At this phase, preservice teachers' misconceptions related to relations and functions concepts were identified, classified, and the possible reasons for these misconceptions were investigated. The second step of the research was conducted during 2005-2006 academic year with 97 preservice teachers attending to their first year at the same university's Primary education department. At this phase, the answer of the question "whether the preservice primary teachers' misconceptions related to the functions can be eliminated or not?" was explored. The results showed that the lesson content, lesson plan and the method, which were developed with respect to taking into consideration the general misconceptions identified, preservice teachers' misconceptions were substantially eliminated.

Key words: Relations and functions, misconceptions, preservice teachers

* Araş. Gör., Zeynep Sonay Polat, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi ABD, zsp@hacettepe.edu.tr

** Yard. Doç. Dr., Yeter Şahiner, Atılım Üniversitesi.

Summary

Purpose

Mathematics has an important role in education and instruction. Academic success in mathematics during the elementary and middle school years is critical due to its influence in forming students' attitudes and motivation towards mathematics. This is why the pre-service primary teachers have to possess primarily the fundamental knowledge of mathematics. Basic Mathematics I and Basic Mathematics II courses take place in the curriculum of primary education department. These courses are important because they are unique to look over the present knowledge, to recover the misconceptions, and to develop mathematical knowledge. The concepts of relations and functions are the fundamental concepts of mathematics. Furthermore, they constitute an important part of algebra.

The purpose of this study is to investigate pre-service primary education teachers' misconceptions about relations and functions concepts. Moreover, it was aimed to inquire whether the pre-service teachers' misconceptions about functions can be eliminated or not.

Method

The present study was a longitudinal study. The first step of the research was conducted during 2004-2005 academic year with 190 pre-service teachers attending to their first year at Hacettepe University Primary Education Department. At this phase, pre-service teachers' misconceptions about relations and functions concepts namely : definition of relation, definition of function, properties of functions, the connection between relation and function concepts, range, domain, inverse relation, inverse function, and types of functions were identified, classified, and the possible reasons for these misconceptions were investigated. For this purpose a measuring tool was developed by the researchers to investigate the misconceptions about relations and functions after reviewing literature and carefully analyzing and categorizing problems. Quantitative analyses were conducted by using a rubric, developed by the researchers. Furthermore, qualitative data were collected through interview task protocols which were carried out to explore the participants' misconceptions in detail.

The second step of the research was conducted during 2005-2006 academic year with 97 pre-service teachers attending to their first year at the same university's Primary education department. At this phase, the answer of the question "whether the pre-service primary teachers' misconceptions about the functions can be eliminated or not?" was explored. Researchers prepared lesson content, lesson plan and the method taking into consideration the general misconceptions identified in the first step of the study. The same measurement tool was used to investigate whether the misconceptions were eliminated or not. The numbers of sample questions were increased, the concepts that students may have misconceptions were discussed in detail during the class and students were given additional inquiry homework.

Results

The results of the first step showed that pre-service teachers had some misconceptions about relations and functions concepts. The misconceptions about functions emerged in the present study were consistent with the ones identified in the literature.

Some examples of pre-service teachers' common misconceptions and their proportion after first and second step are given as respectively;

"It is only to say a relation is reflective if it only has one pair of (x,x) ", (9%), (0%)

"a relation is symmetric when the first component is equal to second component " (53%), (12%)

"a function is a one to one relation " (4%), (3%)

"a function merely involves range, domain and pairs ", (8%), (0%)

“a function is a relation that is symmetric, inverse symmetric, reflective and transitive”, (%7), (%6)

“a constant function is always $F(x) = x$ ”, (%4), (0%)

“a constant function is always $F(x) = 1$ ”, (%5), (0%)

An interesting finding of this study was that students, who were able to define the function concept correctly, declared that “a relation is a function when it is one to one and onto” by the proportion of 40 %. This misconception still appeared at the end of the second step by the proportion of 5%.

The results of the interviews indicated that pre-service teachers preferred the representation and diagram instead of formal definition while answering the questions.

Conclusion

The findings of the second step showed that students’ misconceptions were mostly eliminated. The results of the whole study showed that the lesson content, lesson plan and the method, which were developed with respect to taking into consideration the general misconceptions identified, was substantially effective in eliminating pre-service teachers’ misconceptions.

Giriş

Matematik, temel eğitim ve öğretimde çok önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle sınıf öğretmeni adaylarının en temel matematik bilgilerine öncelikle kendilerinin sahip olmaları, gereklilikten öte, bir zorunluluktur.

Temel Matematik I ve II dersleri, Sınıf Öğretmenliği Lisans Programı’nın birinci sınıfında yer alan derslerdendir. Öğretmen adaylarının Temel Matematik konularında mevcut bilgilerini gözden geçirmeleri, sahip oldukları kavram yanlışlarını gidermeleri ve yeni bilgilerle zenginleşmeleri bakımından oldukça önemlidir. Ayrıca bu dersler, öğrencilerin 4 yıl boyunca matematiğin temel kavramlarını öğrenebilecekleri tek derstir.

Bağıntı ve fonksiyonlar, her ne kadar ilköğretim müfredatının ilk kademesinde kendi adıyla yer almasa da matematik dersinin içinde başka başlıklar altında sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Özellikle örüntü ve ilişkiler konusu pek çok fonksiyon kavramını bünyesinde taşır. Bu nedenle öğretmen adaylarının fonksiyon konusunun kavramlarına hâkim olması, onlara meslek yaşamlarında önemli kolaylıklar sağlar.

Bağıntı ve fonksiyonlar, matematiğin temel konularındandır ve cebir müfredatının önemli bir parçasını oluşturur. Vinner (1983) öğrencinin fonksiyon konusuyla ilgili kısıtlı bir bakış açısının, onun problem çözme becerilerini de engelleyebileceğini savunmuştur. Matematiğin içindeki diğer kavramlar gibi, fonksiyon kavramı da belli bir karakteristiğe sahiptir ve belli bir yönde düşünülmesi, öğrenilmelidir.

Fonksiyon kavramını anlamak, kavramı matematiğin dışındaki alanlarda ve matematiğin içindeki farklı bağlamlarda kullanmak gibi yönleri kapsamaktadır. Birçok matematik öğretmeni, fonksiyon kavramının modern matematik için önemli, fen ve teknoloji için gerekli olduğunu iddia etmiştir (Leinhardt, Zaslavsk, & Stein 1990).

Çeşitli NCTM yayınlarında (1989, 1991, 2000), fonksiyon konusunun matematik müfredatı içerisinde önemli bir yerde olması gerektiği, öğrencilerin diğer matematiksel konuları anlamalarına ve farklı matematik konuları arasında ilişki kurmalarına yardımcı olduğu vurgulanmaktadır.

Matematik müfredatı içinde düşünüldüğünde, cebir konuları arasında fonksiyonlar önemli başlıklardan birisidir. Matematiksel düşünmenin gelişiminde önemli bir pozisyonda ve matematiğin bütün dallarıyla ilişkili bir kavramdır. Fakat araştırmalar, öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarının düşük olduğunu göstermektedir. Matematiğin içindeki diğer kavramlar

gibi, fonksiyon kavramı da belli bir karakteristiğe sahiptir ve belli bir yönde düşünülmesi, öğrenilmelidir. Öğrenci, fonksiyon konusunu matematik dersinin dışına çıkaramıyorsa, bu onun konu üzerinde hâkim olmadığını gösterir (Vinner, 1983).

Fonksiyon kavramını tam olarak anlamak, gerektiğinde kavramı matematiğin dışındaki alanlarda uygulamak ve matematiğin içindeki farklı bağlamlarda kullanmak gibi birçok boyutu kapsamaktadır. Tanım ve görüntü kümesi, fonksiyon konusunun anlaşılması için önemli kavramlardır. Bu kavramları derinlemesine anlamakta güçlük çeken öğrencilerde fonksiyon konusu yeterince anlaşılmamaktadır (Even, 1990; Sfard, 1991).

Fonksiyonlardaki kavram yanlışlarının çeşitlerini araştıran birçok çalışma yapılmıştır. Fonksiyon konusu, tanım kümesi, görüntü kümesi, bağıntı gibi birçok kavramı ve tanımlama, dönüşüm yapma, modelleme gibi birçok beceriyi içermektedir. Literatürde genel olarak, fonksiyonun matematiksel dilini anlamak, günlük hayat durumlarını cebirsel ve grafiksel fonksiyon gösterimlerini kullanarak göstermek, fonksiyonların genel doğasını anlamak, cebirsel gösterimdeki bağımsız ve bağımlı değişkenlerin rollerini anlamak gibi konularda kavram yanlışları olduğu belirlenmiştir.

Ülkemizde de fonksiyon konusu genellikle kalıp halinde, kural ve tanım ezberine dayalı bir şekilde öğretilir. Bağıntı ve fonksiyonun tanımı, bağıntının özellikleri, bağıntının hangi koşulları sağladığında fonksiyon olduğu gibi konuların, sadece tanıma dayalı, soyut bir şekilde ezberlenerek öğrenilmeye çalışılması, birçok kavramsal yanlışlığı beraberinde getirmektedir. Bu konuda yapılan yaygın hataların tespiti, sınıflandırılması ve hataların altında yatan sebeplerin irdelenmesi; mevcut müfredatın gözden geçirilmesi, bu konunun öğretilme biçiminin yeniden ele alınması bakımından önem taşımaktadır.

Bu çalışmanın ilk aşamasında, sınıf öğretmenliği öğrencilerinin Temel Matematik II dersi kapsamında öğrendikleri bağıntı ve fonksiyonlar konusu ile ilgili olarak “bağıntının tanımı ve özellikleri, bağıntı ile fonksiyon arasındaki ilişki, fonksiyonun tanımı, özellikleri, tanım kümesi, görüntü kümesi, değer kümesi ve çıkış kümesi, birebir ve örten fonksiyon, içine fonksiyon, bileşke fonksiyon, ters bağıntı ve ters fonksiyon, sabit fonksiyon, tek ve çift fonksiyon” gibi kavramlarda ortaya çıkan kavram yanlışlarını saptamak amaçlanmıştır.

Çalışmanın ikinci aşamasında ise belirlenen kavram yanlışlarını dikkate alarak hazırlanmış bir ders içeriğinin ve uygulanan metodun, bu hataları ne ölçüde giderebildiği araştırılmıştır.

Araştırma Problemi

Birinci aşama: “Sınıf Öğretmeni adaylarının bağıntı ve fonksiyon konusunda sahip oldukları kavram yanlışları nelerdir?”

İkinci aşama: “Sınıf Öğretmeni adaylarının bağıntı ve fonksiyon konusunda sahip oldukları kavram yanlışları ne ölçüde giderilebilir?”

Yöntem

Araştırmanın Niteliği

Yapılan çalışma hem niceliksel hem de niteliksel yönü olan bir araştırmadır. Kavram yanlışlarının tespit edilmesi ve giderilip giderilmediğini belirlenmesinde nicel yöntemden, sonuçların tutarlılığı ve kalıcılığının belirlenmesinde nitel yöntemden yararlanılmıştır.

Araştırma Grubu

Araştırmanın birinci basamağında, araştırma grubunda, 2004-2005 öğretim yılında Hacettepe Üniversitesi Sınıf Öğretmenliği Bölümü’nde okumakta olan 190 öğrenci yer almıştır.

Araştırmanın ikinci aşaması, 2005-2006 öğretim yılında yine Hacettepe Üniversitesi Sınıf Öğretmenliği Bölümü’nde, birinci sınıfta okumakta olan 97 öğrenciyle yürütülmüştür.

Verilerin Toplanması

Araştırmanın iki aşamasında da aynı ölçme aracı kullanılmıştır. Verilerin toplanması için 9 tane açık uçlu sorudan oluşan ölçme aracı geliştirilmiştir. Ölçme aracının geçerliğinin güvence altına alınabilmesi için uzman görüşlerine başvurulmuştur.

Araştırmanın ilk aşamasında, bağıntı ve fonksiyon konusunda yapılan hataların çeşitlerini ve muhtemel sebeplerini daha detaylı belirlemek için ölçme aracından alınan puanlara göre sıralanan öğrencilerden en yüksek ve en düşük puan alan 5'er (toplam 10) öğrenciyle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

Araştırmanın ikinci aşaması için öğrencilerinin yaptıkları yaygın hataların belirlenmesiyle 2005-2006 öğretim yılında ders işlenişi ve metodu değiştirilmiştir. Sınıf içinde çözülen örnek soru sayısı artırılmış, yaygın hata yapılan kavramların doğru bir şekilde anlaşılabilmesi için daha çok sınıf içi tartışmalar yapılmış ve bu konularda ek araştırma ödevlerine yer verilmiştir. İkinci çalışmada, öğrencilerin yaptıkları yaygın hataların giderilip giderilmediğini tespit etmek amacıyla ilk çalışmada kullanılan ölçme aracından yararlanılmıştır.

Öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtlar, araştırmacılar tarafından geliştirilen dereceli anahtarla değerlendirilmiştir.

Bulgular

İlk çalışmada öğrencilerin çoğunlukla, fonksiyonun formal olan cebirsel tanımını kullanmak yerine, fonksiyonu şemayla gösterme eğiliminde oldukları gözlenmiştir. Tanım verirken lisede öğrendikleri benzetmelerle "tanım kümesi, çocukların kümesi; görüntü kümesi, anneler dersek, ayrı çocukların annesi bir olabilir ama bir çocuğun iki annesi olamaz" gibi kalıp cevaplar vermeleri dikkat çekmiştir.

İlk çalışma için, veriler detaylı bir şekilde incelendiğinde, sınıf öğretmeni adaylarının fonksiyon konusunda çeşitli kavram yanlışlarına sahip oldukları belirlenmiştir. Özellikle fonksiyonun tanımı ile ilgili kavramlarda belirlenen kavram yanlışları, literatürde belirlenmiş olanlarla benzerlikler göstermektedir.

İlk aşama sonunda belirlenen kavram yanlışları Tablo 1'de gösterilmiştir. Tablo 1'den de görülebileceği gibi, bileşke fonksiyonu ile ilgili, belirlenen ve sınıflandırılan bir kavram yanlışlığı bulunmamıştır. Fakat yapılan görüşmelerde öğrencilerin 9'u, verilen iki fonksiyonun her zaman ve koşulsuz bileşke fonksiyonunun yazılabileceğini söylemiştir. Görüşme yapılan öğrencilerden, fonksiyonun kullanılabileceği bir günlük hayat durumu içeren örnek vermeleri istendiğinde ise bütün öğrenciler, günlük hayat içinde fonksiyonların yer alamayacağını söylemişlerdir.

Tablo 1.
Bulgular Tablosu

Kavram	Belirlenen Kavram Yanılgıları	İlk Çalışma	Son Çalışma
Bağıntının Özellikleri (Yansıma, simetri, ters simetri, geçişme özelliği)	$(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \in \beta$ ise yansı- yandır.	% 7	---
	Tek bir tane (x,x) varsa yansıyan- dır.	% 9	% 3
	$x=y$ ise simetriktir.	% 53	% 12
Bağıntı ile Fonksiyon Arasındaki İlişki Fonksiyonun Tanımı	Bağıntının fonksiyon olabilmesi için 1: 1 ve örten olmalıdır.	% 40	% 5
	Birebir eşlenen bağıntılardır.	% 4	% 3
	Görüntü ve tanım kümesinden oluşan sıralı ikililerdir.	% 8	---
	Karşılığı olan bağıntılara fonksiyon denir.	% 5	---
	Yansıma, simetri, ters simetri, ge- çişme özelliklerini sağlayan bağıntı- dır.	% 7	% 6
	Fonksiyonlar Venn şeması, ortak gösterim yöntemi, koordinat yön- temiyle gösterilen bağıntılardır.	% 3	---
	Birebir Fonksiyon Örten Fonksiyon Sabit Fonksiyon	1: 1'lik ve örtenlik tanımlarını karış- tırma.	% 2
	• $F(x)=0$	% 4	--
	• $F(x)=x$	% 4	--
	• $F(x)=1$	% 5	--

Önemli bulgulardan biri de fonksiyonun tanımını doğru yapabilen öğrencilerin, bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için gerekli koşul olarak bağıntının 1:1 ve örten olması gerektiği cevabını vermiş olmalarıdır. Bu yaygın hata ikinci çalışma sonunda da % 5 oranında devam etmektedir.

Yapılan çalışmanın bütününe baktığımızda, ikinci çalışma sonunda öğrencilerin yaptıkları kavram yanılgılarının büyük ölçüde azaldığı belirlenmiştir. Daha önce saptanan bazı kavram yanılgılarının ikinci çalışma sonunda giderildiği saptanmıştır.

Sonuç ve Öneriler

İlk çalışmada yapılan görüşmeler sonunda öğrenciler, fonksiyon konusunu genellikle ezberlediklerini, lisede de bu konunun çok detaylı öğretilmediğini ve dönemin sonlarına doğru geldiği için de üzerinde çok durulmadığını belirtmişler; üniversite sınavına hazırlanırken fonksiyon sorularını ezbere yaptıklarını, şimdiye kadar tanımını öğrenmeye ihtiyaç duymadan da çözüm yollarını ezberleyerek sonucu bulabildiklerini eklemişlerdir. Öğrenciler, Temel Matematik dersi kapsamında da fonksiyon konusunu sadece sınavları geçmek için ezberlediklerini söylemişlerdir.

Sınıf öğretmeni adaylarının, tespit edilmiş kavram yanılgılarıyla üniversite sıralarına kadar geldikleri düşünüldüğünde, bu hataların tespitinde ve giderilmesinde Temel Matematik derslerinin önemi daha iyi anlaşılmaktadır. Üniversiteye sınıf öğretmeni olmak için gelen öğrencilerin bu konuyu anlatmayacakları için bilgilerini yeniden gözden geçirmeleri, eksikliklerini gidermeleri genellikle onlar için cazip bir durum değildir. Bu konu Temel Matematik dersi kapsamında da anlatılırken çeşitli materyaller hazırlatılarak, kavram haritaları kullanarak ve teknolojinin de kullanıldığı çoklu temsil temelli öğretim metoduyla ders daha zengin hale getirilebilir.

İlk çalışma sonunda, Temel Matematik II dersi kapsamında fonksiyon konusu detaylı işlenmiş olsa bile, dönem sonunda öğrencilerin birtakım hataları sürdürdükleri görülmektedir. Yapılan bu hatalar doğru bir yaklaşımla büyük ölçüde giderilebilir. Nitekim kavram yanlışlarını bilerek hazırlanmış ders içeriği, dersin işleniş planı ve kullanılan metot sonucunda bu kavram yanlışlarının çok azaldığı yapılan araştırmayla saptanmıştır. Yine de tüm yanlışlardan kurtulmak mümkün olmamış, ikinci aşama sonunda da öğrencilerin hâlâ bazı benzer yaygın hataları sürdürdükleri anlaşılmıştır.

Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin fonksiyon konusunda yaptığı hataların dönemin başlarında belirlenmesi, öğrencilerin daha önceki bilgileri yoklanarak hatırlatmalar yapılması, yanlış anlaşılabilir noktaların giderilmeye çalışılması, kavram yanlışlarını büyük ölçüde azaltabilir. Konuyla ilgili yaygın yapılan hatalar araştırılıp belirlenerek hazırlanmış ders içerikleriyle daha etkili öğrenme ortamları hazırlanabilir.

Mevcut matematik kitaplarında yer alan ve Temel Matematik II kapsamında bulunan fonksiyonun formal tanımı (Dirichlet- Bourbaki), oldukça soyut ve kavraması zor olan bir tanımdır. Araştırmalar göstermiştir ki fonksiyonlarda çoklu temsil temelli öğretim, konunun daha derinlemesine anlaşılmasına olanak sağlamaktadır. Teknolojik araçlar, öğrencilerin akıllarından geçen fonksiyonun gösterimlerini sergileyebilmelerine olanak sağlar ki bu da fonksiyon konusunu anlamalarını kolaylaştırır. Bilgisayar yazılımları ile temsiller arasındaki uygunluklar kolayca yapılabilir. Günlük hayat problemlerini içeren durumlardan örnekler verilerek, öğrencilerin fonksiyon konusunu modelleyerek öğrenmeleri sağlanabilir, böylece konu daha cazip, ilgi çekici hale getirilebilir.

Fonksiyonlar ilk ve ortaöğretimde birçok matematik konusunun içinde yer almaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin ön bilgileri yoklanarak, kavram yanlışları giderilerek, daha sonra öğrenecekleri birçok konunun sağlam temeller üzerine oturması sağlanabilir. Öğrencilere, fonksiyonun önemli ve temel bir konu olduğu fikri verilmelidir.

Kaynakça

- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 521-554
- Leinhardt, G., Zaslavsk, O., Stein M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1-64
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va. NCTM.
- NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va. NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va. NCTM.
- Stanford, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of functions. *The International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 14, 293-305
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Makale Geliş: 19-07-2007

İncelemeye Sevk: 19-07-2007

Düzeltilme: 18-09-2007

Kabul: 20-09-2007