



## Cebirsel İspat Yapma Sürecinin Bilişsel Açıdan İncelenmesi: Bir Karma Yöntem Araştırması \*

Mesut Öztürk <sup>1</sup>, Abdullah Kaplan <sup>2</sup>

### Öz

Bu çalışma ortaöğretim matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının cebirsel ispatları yapma süreçlerini bilişsel açıdan incelenmek amacıyla yapılmıştır. Çalışmada karma araştırma yöntemlerinden açıklayıcı ardışık desen kullanılmıştır. Türkiye'nin doğusunda bir ilde görev yapan ortaöğretim matematik öğretmenleri ve aynı ilde öğrenim gören ortaöğretim matematik öğretmen adayları bu çalışmanın örneklemini oluşturmaktadır. Çalışmanın nicel verileri "İspat Yapma Becerisi Teşhis Testi" ile toplanmıştır. Nitel veriler ise katılımcılardan sesli düşünme protokolü yoluyla toplanmıştır. Sesli düşünme protokolünde etkinlik kartları ve gözlem formu kullanılmıştır. Etkinlik kartlarında bir cebir önermesi yazılmış ve katılımcılardan önermeyi ispatlamaları istenmiştir. Çalışmada iki farklı etkinlik kartı kullanılmıştır. Katılımcı etkinlik kartı ile meşgul olurken, yarı-yapılandırılmış gözlem formu yardımıyla araştırmacı tarafından gözlem yapılmıştır. Çalışmada elde edilen nicel verilere betimsel ve kestirimsel istatistik; nitel verilere ise içerik analizi uygulanmıştır. Nicel verilerden elde edilen bulgular matematik öğretmenlerinin ispat yapma becerisi puanlarının öğretmen adaylarının puanlarından daha yüksek olduğunu göstermiştir. Nitel verilerin analizi sonucunda bilişsel beceriler ve üst bilişsel beceriler olarak iki temaya ulaşılmıştır. Bilişsel beceriler temasında ispat önermesini okuma, doğruluğunu değerlendirme, strateji belirleme, işlem süreci ve sezgisel kestirme yolları olarak beş kategori bulunmuştur. Üst bilişsel beceriler temasında işlemleri kolaylaştırma, sorgulama, farkındalık, planlama, strateji belirleme, kontrol etme, ilişkilendirme ve analogik akıl yürütme olarak sekiz kategori tespit edilmiştir.

### Anahtar Kelimeler

Matematiksel ispat  
Biliş  
Üst biliş  
İspatlama  
Cebir  
Karma çalışma

### Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 14.09.2017  
Kabul Tarihi: 10.05.2018  
Elektronik Yayın Tarihi: 18.12.2018

DOI: 10.15390/EB.2018.7504

\* Bu makale Mesut Öztürk'ün Abdullah Kaplan danışmanlığında yürüttüğü "Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin bilişsel açıdan incelenmesi" başlıklı doktora tezinden üretilmiştir.

<sup>1</sup> Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, [mesutozturk@live.com](mailto:mesutozturk@live.com)

<sup>2</sup> Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, [kaplan5866@hotmail.com](mailto:kaplan5866@hotmail.com)

## Giriş

Matematik eğitimi için ispat önemli bir kavramdır. Çünkü ispat matematiksel ifade, formül veya teoremlerin gerekçelerinin görülmesini sağlayarak matematiksel kavramların anlaşılmasını kolaylaştırır (Berggren, 1990; Solow, 2014). Ayrıca ispat bireylerin zihinsel süreçlerini olumlu yönde etkileyerek matematiksel akıl yürütme ve analitik düşünme becerilerinin geliştirilmesine katkı sunacaktır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, s. 56; Rice, 2014). İspatın ileri düzey bilgi ve üst düzey bilişsel beceri gerektiren bir süreç olduğu göz önüne alındığında (Duval, 1999), ispatı anlayarak yapmanın öğrenciler ve öğretmenler için kolay olmadığı anlaşılmaktadır (Aljabeti, 2014). Bu nedenle ispat yapmak için, bireyler kuramsal bilgi eksikliğini giderdikten sonra, bilişsel ve üst bilişsel becerilerini işe koşmalıdır (Zazkis, Weber ve Mejía-Ramos, 2016). Çünkü ispat yapma süreci için önemli olan bazı olgular (bir önermenin niçin doğru olduğuna veya genellemeye ulaşım ulaşılmadığına karar verme, işlemleri neden yaptığını bilme) bilişsel ve üst bilişsel beceriler gerektirmektedir (Özsoy, 2008). Bu bağlamda ispat yapma sürecinin bilişsel açıdan incelenmesi, bireylerin ispat yaparken kullandıkları düşünme süreçlerini açığa çıkaracağından ispat yapmanın öğrenilmesine yardımcı olabilir. Nitekim Selden ve Selden (2015) ispatın iyi öğrenilmesi ve öğretilmesi için ilk olarak ispat yapma sürecindeki bilişsel faktörlerin belirlenmesi gerektiğini belirtmişlerdir. İspat yapma sürecini bilişsel olarak incelemek ispat öğretimi için teorik çerçeve oluşturmada yardımcı olacaktır. Çünkü bireylerin önermeyi okumalarından yaptıkları ispatı değerlendirmelerine kadar olan sürecin ortaya konulması, bu süreçte onların hangi becerilerini işe koştüğünü açığa çıkararak ispat yapma süreçlerinin anlaşılmasını sağlayacaktır.

### *Matematiksel İspat*

Matematik eğitiminde ispat, doğruluğu daha önceden gösterilmiş olan önermelerin doğruluğuna veya yanlışlığına öğrencileri ikna etmedir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016). Matematiksel ispat yapma süreci ispatlama olarak adlandırılmaktadır. Yıldırım (2000) ispatlamayı “Bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır” şeklinde tanımlamıştır. Cebirsel ispat, matematiksel geçerliği olan yollarla gerekli mantıksal çıkarımları yapıp sembolik ifadeler (matematiksel notasyonlar) kullanarak ispat yapma olarak açıklanabilir (Arslan ve Yıldız, 2010). Matematikte herkesin bilgisi, akıl yürütmesi ve düşüncesi farklı olduğundan matematiksel ispatlamalarda kullandıkları yollar da farklılaşmaktadır. Bireylerin ispatlama sürecinde kullandığı farklı yollar genel olarak ispat şemaları olarak adlandırılmaktadır (Sowder ve Harel, 1998). Harel ve Sowder (1998) ispat şemalarını “Dışsal ispat şeması”, “Deneyisel ispat şeması” ve “Analitik ispat şeması” olarak üçe ayırmıştır. Bu şemalar altında ritüel, otoriter, sembolik, tümevarımsal, algısal, dönüşümsel ve aksiyomatik ispat şemalarına göre öğrencilerin ispatın doğruluğunu değerlendirdiklerini belirlemiştir. İspat bir durumun doğru olduğunu söylemenin yanında, niçin doğru olduğunu açıklamayı gerekli kıldığından (Almeida, 2000) ileri düzeyde bilişsel beceri kullanmayı gerektirerek (Fitzgerald, 1996; Senk, 1985); matematiksel düşünmeyi geliştirir (Berggren, 1990; Solow, 2014).

### *İspat ve Matematiksel Düşünme*

Matematiksel düşünme; akıl yürütme, problem çözme, soyutlama ve muhakeme etme gibi becerileri içinde barındıran zihinsel temsil süreçleri olarak adlandırılabilir (Solso, Maclin ve Maclin, 2014; Yıldırım, 2000). Matematiksel düşünme yollarından bazıları sezgisel kestirme yolları, analogik akıl yürütme, yaratıcı düşünme, tümevarımsal akıl yürütme, tümdengelimsel akıl yürütmedir. Sezgisel kestirme yolları, problemin daha hızlı ve kolay çözümünü sağlamak için işlem sayısını azaltmaya yönelik yapılan işlemler olarak tanımlanır. Bu yollar karar verme ve sonuç çıkarmada sıklıkla kullanılır (Plotnik, 2009). Ancak sonucu garanti etmezler hatta bazen sonuçtan uzaklaştırabilirler (Bruning, Schraw ve Norby, 2014). Analogik akıl yürütme, eskiden kullanılan ve doğru sonuca ulaştıran çözüm yolunun yeni karşılaşılan problemin çözüm yolu olarak uyarlanmasıdır (Plotnik, 2009). Başka bir ifadeyle birkaç özellik bakımından benzerlik gösteren çözüm yollarının benzerliğinden yararlanıp bilinen yola çıkarak bilinmeyene ulaşmadır (Fersahoğlu, 2015). Yaratıcı düşünme; yenilikçi fikirler üretip, alışılmışın dışında çözümler getirerek bilgilerin yeniden organize edilmesidir (Sternberg, 2000). Goldstein (2013) yaratıcı düşünmenin genellikle bir analogik akıl yürütme sonucunda ortaya çıktığını savunmuştur. Yaratıcı düşünme iraksak ve yakınsak düşünme olarak ikiye ayrılmaktadır. Iraksak

düşünme çok sayıda çözüm yolu veya fikir üretme olarak açıklanabilir (Woolfolk-Hoy, 2015). Iraksak düşünme bir noktadan başlayıp çözüm yollarının arttırılması olarak açıklanırken, yakınsak düşünme çoğaltılmış çözüm yollarının teke düşürülmesi biçiminde açıklanabilir (Plotnik, 2009). Yakınsak düşünme çözüm yollarının veya fikirlerin tek sonuca indirilmesidir (Woolfolk-Hoy, 2015). Tümdengelsel akıl yürütme, genel olan durumlardan özele indirmeye dayalı akıl yürütme türüdür (Fersahoğlu, 2015). Tümdengelsel akıl yürütmede iki öncül önerme ve bir sonuç önermesi söz konusudur (Goldstein, 2013). Tümevarım bireyin bir veya daha fazla özel örnekten yola çıkarak genel ifadeye ulaşmasıdır (Goldstein, 2013). Tümevarımsal akıl yürütme bireyin deneyimlerinden yararlanarak çıkarımda bulunmasını gerektirir (Solso vd., 2014). Tümevarımsal akıl yürütme için tümdengelsel akıl yürütmede olduğu gibi geçerlilik durumu değil argümanın zayıflığı veya güçlülüğü söz konusudur (Goldstein, 2013).

### ***Biliş ve Üst Biliş***

Yukarıda açıklandığı gibi matematiksel düşünmenin bileşenlerinden belki de en önemlisi üst biliştir. Üst biliş genellikle bilişle birlikte değerlendirilen ve bilişten ayrımı güç olan bir kavramdır. Çünkü biliş ve üst biliş birbirine çok yakın iki kavramdır. Biliş, bireyin belli görevleri yerine getirirken kullandığı -zihinsel süreçleri içeren- bilgi ve faaliyetlerdir (Özdemir ve Sarı, 2016). Forrest-Pressley ve Gillies (1983) bilişi, okuyucu tarafından kullanılan beceriler ve stratejiler olarak belirtmiştir. Üst biliş ise bireylerin öğrenme sürecinin farkında olarak düşünmesi ve bilişlerini düzenlemesi şeklinde tanımlanır (Akın, 2013). Başka bir ifadeyle üst biliş, bilişsel sistemin görev kontrol merkezidir (Bruning vd., 2014). Üst biliş kişinin herhangi bir görevi yerine getirmesinin (problem çözme, okuma, ispat yapma gibi) veya kendi öğrenmesini düzenlemesinin bir bölümüdür (Paris ve Winograd, 1998). Örneğin, öğrencilerin isimlerini aklında tutamadığını bilen bir öğretmenin öğrencilerden kâğıda isimlerini yazıp yakalarına asmalarını istemesi üst bilişe sahip olduğunu göstermektedir (Bruning vd., 2014).

Biliş ve üst biliş ayrımı, bilginin nasıl kullanıldığı (Özdemir ve Sarı, 2016) ve sürecin nesnesinin ne olduğu (Karakelle ve Saraç, 2010) ile ilgilidir. Bir görevin tamamlanabilmesi için gerekli olan beceriler (stratejileri bilmek, temsilleri kullanmak gibi) bilişselken; bu becerilerin farkındalığı ve bu beceriler (biliş) üzerinde düşünme üst bilişeldir (Okçu ve Kahyaoğlu, 2007; Özdemir ve Sarı, 2016). Weinert (1987) biliş ve üst bilişi ayırmak için üst bilişi ikinci derece biliş olarak yani düşünme hakkında düşünme olarak açıklamıştır. Bir konuya çalışırken veya bir görevi yerine getirirken not tutma, yapılan işlem hatalarını fark etme ve hedef ile ulaşılan sonucu karşılaştırma üst bilişsel olarak değerlendirilmektedir. Aynı görevi yerine getirirken not tutmak yerine kopya etmek, ezberlediği hazır bir formülü doğrudan kullanmak gibi beceriler ise bilişsel olarak değerlendirilmektedir. Bu beceriler üst bilişsel ve bilişsel beceri ayrımını yapmada bir yol sağlamaktadır. Bu ayrım şöyle açıklanabilir; üst bilişsel beceriler farkındalık, üst düzey düşünme veya eleştirel düşünme gerektirirken, bilişsel beceriler buna benzer herhangi bir beceri kullanmayı gerektirmeden (otomatikleşmiş beceriler) görevi yerine getirmede kullanılır (Akın, 2013, s. 123).

Üst düzey bilişsel beceriler kullanarak doğru düşünebilen (matematiksel düşünme becerisine sahip) bireyler yetiştirilmesi matematik eğitimcileri için güç bir durumdur (Hamilton, Kelly ve Sloane, 2002). Bunun için öncelikle matematik öğretmenlerinin mesleki gelişimlerinin yeterli olması gerekmektedir. Çünkü mesleki gelişimi yeterli olan öğretmenler öğrencilerinin bilgi ve becerilerini olumlu yönde geliştirebilirler (Rosenholtz, 1985). Öğretmenlerin mesleki gelişimlerinin değerlendirilmesinde bazı değişkenler (mesleki deneyim süreleri ve aldıkları eğitimler gibi) ön plana çıkmaktadır (Copur-Gençturk ve Lubienski, 2013). Bu değişkenlerin incelenmesi gelişimsel araştırmalarla mümkün olabilir. Öğretmen adaylarının 1. sınıf ve son sınıf düzeylerine göre karşılaştırılması; onların ortaöğretimde aldıkları bilgi birikimleriyle, bu bilgi birikimine üniversitede ispata yönelik aldıkları bilgileri ilave etmeleriyle oluşan bilgi birikimlerinin karşılaştırılmasına olanak tanır (İmamoğlu ve Yontar-Toğrol, 2010). Bu çalışmada öğretmen adaylarının aldığı eğitime göre ispat yapma becerilerinin farklılaşma durumunu incelemek için 1. sınıf ve son sınıf öğretmen adayları çalışmaya dâhil edilmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının henüz ortaöğretimden getirdikleri bilgilerle ispat yapabileceği düşünülmektedir. Çünkü bu öğretmen adayları ortaöğretime tamamlamış ve yükseköğrenimin henüz başındadır. Son sınıf öğretmen adayları ise yükseköğretimde alınması gerekli alan derslerini tamamlamıştır. Bu nedenle ortaöğretimdeki bilgilerinin üzerine yükseköğretimde

aldıkları ispat yapma bilgilerini de eklemiş olmaları öğretmen yetiştirme için beklenen durumdur. Çalışmaya öğretmenlerin dahil edilmesinin nedeni ise öğretmenlerin yükseköğretimde kazandıkları düşünülen ispat yapma becerilerinin korunup korunmadığını veya geliştirilip geliştirilemediğini belirlemektir. Knuth (2002) öğretmenlik sürecinde bireylerin yükseköğretiminde almış olduğu alan derslerinin pek çoğunu kullanmadığını ve ortaöğretim matematik öğretim programının ispat kavramına yeterince yer vermediğini belirtmiştir. Bu durum öğretmenlerin yükseköğretimde kazandıkları düşünülen ispat yapma becerilerinin zayıflamasına veya unutulmasına yol açabilir. Öğretmenlerin formal ispat yapma becerilerinin zayıflaması veya unutulması onları ispat yapmadan uzaklaştırarak ispat yapmada başarısız olmasına neden olabileceği gibi üst bilişsel bilgi ve becerisini kullanıp, matematiksel akıl yürütmede bulunarak doğru ve geçerli informal ispat yapmasına da neden olabilir. Başka bir ifadeyle formal ispat yapma zamanla unutulabilir ancak daha sonrasında öğretmenlik mesleğinin bireye kazandırdıklarıyla birlikte informal yollarla birey daha iyi ispat yapma becerisine sahip olabilir. Bu nedenle öğretmenler ve öğretmen adayları çalışmaya dâhil edilerek gelişimsel olarak durumun nasıl değiştiği incelenmeye çalışılmıştır.

### *Alan Yazın Derleme*

Alan yazın incelendiğinde yapılan çalışmalar genellikle sadece nicel veya sadece nitel yöntem içermektedir. Nicel çalışmalar genellikle ölçek geliştirme, betimsel araştırma ve ilişkisel araştırma boyutunda incelenmiştir (Komatsu, 2016; Yang ve Lin, 2008; Yang, 2012). Nitel araştırmalar ise görüş incelemeye yönelik veya ispat sürecindeki bilgi ve becerileri incelemeye yönelik yürütülmüştür (Alcock, 2010; Alcock ve Weber, 2005; Almeida, 2000; Ceylan, 2012; Doruk ve Kaplan, 2015; Fukawa-Connelly, 2012; Knuth, 2002; Lesseig, 2016; Martin ve Harel, 1989; Stylianides ve Stylianides, 2009). Bu çalışmada ise nitel ve nicel yöntemler kullanılarak karma araştırma yöntemi kullanılmıştır. Bu durum daha geniş örneklemden analitik genelleme yapmaya imkân sağlayacaktır. Ayrıca bu çalışma katılımcıların düşünme süreçlerine odaklanarak ispat sürecini bilişsel açıdan incelemesi bakımından önceki çalışmalardan ayrılmaktadır. Alan yazında yapılan çalışmaların daha çok sadece öğrenciler (Bell, 1976), sadece öğretmen adayları (Ceylan, 2012; Demiray ve Işıksal-Bostan, 2017), matematikçiler (Almeida, 2000), öğrenci ve öğretmenleri (Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow ve Molina, 2016) ile yürütüldüğü belirlenmiştir. Bu çalışma örneklem bakımından da diğer çalışmalardan ayrılmaktadır. Çalışmanın katılımcıları öğretmen ve öğretmen adayları olduğu için gelişimsel açıdan da inceleme olanağı bulunmuştur. Alan yazında ispata yönelik yapılan çalışmalarda veri toplama aracı olarak görüş belirlemeye yönelik ölçekler, görüşme ve gözlem formları kullanılmıştır. Üst bilişe yönelik yapılan çalışmalarda ise daha çok sesli düşünme protokolü kullanılmıştır. Bu çalışmada ispat yapma sürecindeki üst bilişsel beceriler bilişsel açıdan incelendiğinden çalışmada sesli düşünme protokolü, etkinlik kartları ve gözlem formu kullanılmıştır. Bunların yanı sıra ispat yapma becerisi teşhis testine de yer verilmiştir. Alan yazında çalışmalarda elde edilen nicel verilerin analizinde betimsel ve kestirimsel istatistik kullanılmıştır. Nitel verilerin analizinde ise daha çok betimsel analiz yapılarak var olan durumlar sunulmuştur. Bununla birlikte öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının problem çözme sürecindeki bilişsel yapılarını beraber incelemeyi amaçlayan (Metallidou, 2009) ve matematik öğretmen adaylarının ispat yapma sürecindeki bilişsel yapıları ortaya koymayı hedefleyen (Barnard ve Tall, 1997) çalışmalar da alan yazında mevcuttur. Ancak matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerindeki bilişsel yapıları incelemeye yönelik çalışmaların alan yazında yeterince bulunmadığı belirlenmiştir. İspat yapma sürecindeki bilişsel durumları ortaya koymak, ispat öğretiminde izlenecek yollar için de belirleyici faktör olacaktır (Harel ve Sowder, 2007). Güler' de (2013) ispatın doğasını anlamak için ispat sürecini incelemenin gerekli olduğunu belirtmiştir. Günümüzün popüler çalışma alanlarına bakıldığında problem çözme, matematiği anlama gibi alanlarda görüş belirleme veya bilgi-beceri tespit etmeye yönelik çalışmalardan uzaklaşarak bilişsel açıdan incelemeye yoğunlaşıldığı görülmektedir (Kieran, 2017). Hatta bu çalışmalar daha ileri taşınarak zihinsel açıdan (fMRI, PET gibi cihazlarla) inceleme yollarına gidilmiştir (Krueger vd., 2008; Newman, Carpenter, Varma ve Just, 2003). Bu tür çalışmalar bireylerin düşünme süreçlerini ortaya koyması bakımından önemlidir (Kieran, 2017) çünkü bireyin bilişsel ve zihinsel süreçleri bilindiğinde öğrenmeye yönelik daha kapsamlı etkinlikler düzenlenebilir ve böylece öğrenmesi kolaylaşabilir. Bu doğrultuda ispata yönelik bilişsel süreçlerin incelenmesinin ispatın öğrenilmesi, öğretilmesi ve zihinsel süreçlerin incelenmesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Barnard ve Tall (1997) matematik öğretmenliği 1. sınıfta öğrenim gören öğrencilerle yaptıkları çalışmada ispat yapma sürecini bilişsel açıdan ortaya koymuşlardır. Çalışmada katılımcıların sözel ifadelerden sembolik (cebirselsel) ifadelerle geçiş, cebirselsel ifadelerin kullanımı, olmadığına örnek verme, cebirselsel ve sözel ifadeler arasında bağ kurma, işlemsel olmayan adımlar -doğru gerekçelendirme (aksiyomatik), gerekçelendirme yapmadan bağ kurma, deneysel gerekçelendirme, sonuca ulaşamayan akıl yürütme, yanlış akıl yürütme, yardım olmadan sonuca ulaşamama- kullanma, sembollerden hareket ederek yol belirleme, bazı işlem adımlarını göz ardı etme ve genelleme yapma gibi beceriler sergilediklerini belirlemiştir. Yang (2012) lise öğrencileriyle yaptığı çalışmada öğrencilerin bilişsel okumalarını, üst bilişsel okumalarını ve geometri ispatlarını okuyup anlamalarını yapısal eşitlik modellemesi ile incelemiştir. Bunun için bir ölçek geliştirmiştir. Ölçekte beceriler bilişsel ve üst bilişsel olarak ayrılmıştır. Araştırmacının belirttiği bilişsel becerilerden bazıları şunlardır: İspat önermesini ilk kez okuma, önemli yerlerini belirlemek için altını çizme, önermeyi anlamak için şekil çizme. Araştırmacı ispat önermesini adım adım okuma (Soruyu bütün olarak okumak yerine parça parça okuyarak, durup düşünerek ilerleme), verilenler üzerine düşünme, ispatın anahtar kavramını belirleme, ispatın nasıl başlayıp sonuca ulaştığını kendine sorma, hata yaptığında hata yaptığı bölümü belirleme, ispat adımlarında ne yapacağını düşünme ve kontrol etmeyi üst bilişsel olarak ele almıştır.

Bu gereklilikler doğrultusunda çalışma matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının cebirselsel önermeleri ispatlama sürecini bilişsel açıdan incelemek amacıyla yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. Matematik öğretmeni ve öğretmeni adayları cebir ispatı yapma sürecinde ne tür bilişsel beceriler sergilemektedir?
2. Matematik öğretmeni ve öğretmeni adayları cebir ispatı yapma sürecinde ne tür üst bilişsel beceriler sergilemektedir?
3. Matematik öğretmeni ve farklı sınıf düzeyindeki matematik öğretmeni adaylarının cebir ispatı yapma becerileri seviyelerine göre farklılaşmakta mıdır?

## Yöntem

### *Araştırma Modeli*

Çalışmada karma araştırma yöntemlerinden açıklayıcı ardışık desen kullanılmıştır. Açıklayıcı ardışık desenin amacı nicel çalışma ile başlayıp bu aşamada elde edilen sonuçları nitel çalışmalarla açıklamaktır (Creswell, 2017). Bu desen nicel verilerin toplanması ile başlar. Ardından toplanan nicel veriler analiz edilir ve nitel araştırmanın katılımcıları belirlenir. Sonraki aşamada nitel veriler toplanıp analiz edilir ve son olarak nicel ve nitel veriler ilişkilendirilir (Creswell, 2017; Hesse-Biber, 2010). Bu desen nicel çalışma ile başladığı için bu nicel araştırmacılar için ilgi çekicidir. Bununla birlikte belirli özelliklere sahip olan katılımcıları belirlemeye de olanak sağlaması bu desenin güçlü yanlarından. Buna rağmen çalışma sürecinin nicel ve nitel yaklaşımların sıralı yürütülmesini gerektirdiğinden bu desen fazla zaman almaktadır. Çalışmada açıklayıcı ardışık desen kullanılmasının başlıca nedenleri; ispat yapma becerisinin gruplara göre farklılaşp farklılaşmadığını nicel olarak karşılaştırmak, ispat yapma sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel becerileri nitel yollarla derinlemesine inceleyerek ortaya çıkarmak ve nicel-nitel verilerin birbirini destekleyip desteklemediğini incelemektir. Bir başka neden de öğretmenler ve öğretmen adayları için ulaşılan sonuçları daha genel biçimde sunabilmektir.

### *Katılımcılar*

Çalışmanın nicel bölümüne 25 ortaöğretim matematik öğretmeni ve farklı seviyedeki 48 matematik öğretmen adayı katılmıştır. Katılımcı öğretmen adaylarının %60'ı (n=29) son sınıf matematik öğretmeni adayı, %40'ı (n=19) birinci sınıf matematik öğretmeni adaydır. Bu katılımcılar içerisinden seçilen 6 matematik öğretmeni ve farklı seviyedeki 12 matematik öğretmeni adayı çalışmanın nitel bölümünün örneklemini oluşturmuştur. Öğretmen adaylarının yarısı (n=6) son sınıf matematik öğretmeni adayı, yarısı da (n=6) birinci sınıf matematik öğretmeni adaydır. Creswell ve Plano-Clark (2014) açıklayıcı desenin kullanıldığı çalışmalarda nicel ve nitel aşamalar için iki aşamalı örneklem seçiminin daha uygun olduğunu ifade etmiştir. Çalışmanın nicel kısmı için örneklemin seçiminde



amaçlı örnekleme yöntemlerinden tipik durum örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Tipik durum örnekleme yöntemi bir durumu temsil edecek ortalama bireylerin seçimine dayanır (Gürsakal, 2013). . Çalışmanın nitel bölümünde ise yine amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemi bir durumdaki farklı düşünceleri belirlemeyi amaçlar ve bu örnekleme türünde geniş çaplı durumlar ortaya konulabilir (Patton, 2002). Bu çalışma, elde edilen durumları daha geniş örnekleme üzerinde yorumlamayı amaçladığından bu örnekleme seçim yöntemleri sırasıyla kullanılmıştır.

Çalışmanın nicel bölümüne katılan matematik öğretmenlerinin mesleki kıdemleri 2-23 yıl aralığındadır. Öğretmenlerin 7'si kadın, 18'i erkektir ve öğretmenlerin %56'sı Fen Fakültesi Matematik Bölümü, %44'ü Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü mezunudur. 15'i lisans mezunu, 7'si yüksek lisans mezunu, 3'ü doktora öğrencisidir. Öğretmenlerden 2'si Fen Lisesi, 2'si özel okul, 5'i Mesleki ve Teknik Lise, 6'sı İmam-Hatip Lisesi, 10'u Anadolu Lisesinde görev yapmaktadır. Çalışmaya katılan son sınıf matematik öğretmen adaylarının ise 15'i kadın, 14'ü erkektir. Son sınıf öğretmen adaylarının %41'i matematik dersi verme deneyimine sahip olup (özel ders verme veya herhangi bir özel kuruluştaki öğretmenlik yapma), %59'u bu deneyime sahip değildir. Çalışmaya katılan son sınıf öğretmen adaylarının tamamı Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I-II derslerini almışlardır. Çalışmaya katılan 1. sınıf matematik öğretmen adaylarının 9'u kadın, 10'u erkektir. 1. sınıf öğretmen adaylarının 3'ü herhangi bir yerde matematik dersi verme deneyimine sahipken, diğer öğretmen adayları herhangi bir yerde ders verme deneyimine sahip değildir. Çalışmaya katılan 1. sınıf öğretmen adayları Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I-II derslerini ise henüz almamışlardır. Bu derslerde diğer derslere göre daha yoğun olarak cebir ispatları yapılmaktadır.

Çalışmanın nitel katılımcılarının belirlenmesinde "İspat Yapma Becerisi Teşhis Testi"nden alınan puanlara göre başarı puanı grupları (iyi, orta ve düşük) oluşturulmuştur. Başarı gruplarının oluşturulmasında ilk olarak katılımcılar kendi grupları içinde aldıkları puanlara göre sıralanmıştır. Ardından katılımcı sayısı 3'e bölünerek üç grup oluşturulmuştur. Oluşturulan gruplardan ikişer katılımcı seçilerek -biri erkek, biri kadın- çalışmanın nitel bölümüne dâhil edilmiştir. Katılımcıların seçiminde, katılımcıların grup sınırında olmamasına (iyi puan grubunun en alt sırasında, orta puan grubunun en alt sırasında veya en üst sırasında ve düşük puan grubunun en üst sırasında yer almaması) dikkat edilmiştir. Bu değerlerde yer alan katılımcıların grubun özelliğini tam olarak yansıtmama ihtimali düşünüldüğünden böyle bir uygulama yapılmıştır. Çalışmada katılımcılar için birer kod isim kullanılmıştır. Kod isimlerin atanmasında  $a_{ij}$  matris sisteminden yararlanılmıştır. Burada  $a$ :  $\bar{O}$  = Öğretmen,  $\bar{A}S$  = Son sınıf öğretmen adayı,  $\bar{O}A1$  = 1. sınıf öğretmen adayı;  $i$ :  $\bar{I}$  = iyi,  $\bar{O}$  = orta,  $\bar{D}$  = düşük;  $j$ : 1 = erkek, 2 = kadın kodları kullanılmıştır. Çalışmanın nitel kısmına katılan öğretmenlerin özellikleri Tablo 1'de sunulmuştur. Öğretmen adayları için bu değişkenler sabit olduğundan tabloda yer verilmemiştir.

**Tablo 1.** Çalışmanın Nitel Bölümüne Katılan Öğretmenlerin Özellikleri

Katılımcılar	Fakülte türü	Son mezun olduğu eğitim düzeyi	Lisans Öğrenim Süresi	Mesleki deneyim	Görev yaptığı kurum
Ö <sub>D1</sub>	Eğitim	Lisans	5 yıl	6 yıl	İmam-Hatip Lisesi
Ö <sub>D2</sub>	Eğitim	Lisans	5 yıl	4 yıl	Mesleki ve Teknik Lise
Ö <sub>O1</sub>	Eğitim	Yüksek Lisans	5 yıl	12 yıl	Anadolu Lisesi
Ö <sub>O2</sub>	Fen	Yüksek Lisans (Doktora öğrencisi)	4 yıl	10 yıl	Fen Lisesi
Ö <sub>I1</sub>	Fen	Lisans	3,5 yıl	6 yıl	Anadolu Lisesi
Ö <sub>I2</sub>	Eğitim	Yüksek Lisans	5 yıl	2 yıl	İmam-Hatip Lisesi

### **Veri Toplama Araçları**

Çalışmada “İspat Yapma Becerisi Teşhis Testi”, sesli düşünme protokolü, etkinlik kartı ve gözlem formu olarak dört farklı veri toplama aracı kullanılmıştır. Veri toplama araçları aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

#### *İspat Yapma Becerisi Teşhis Testi*

Çalışmada nicel verilerin toplanmasında Öztürk ve Kaplan (2017) tarafından ortaöğretim matematik öğretmenleri için geliştirilen “İspat Yapma Becerisi Teşhis Testi” kullanılmıştır. Bu çalışmada matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma becerisinin ölçülmesi amaçlandığından bu test kullanılmıştır. Alan yazında ortaöğretim matematik öğretmenleri ve öğretmeni adaylarına yönelik Türkçe dilinde başka bir ispat başarı testi bulunmaması ve bu testin hem geometri hem de cebir sorularını içermesi nedeniyle “İspat Yapma Becerisi Teşhis Testi” çalışmada kullanılmak üzere seçilmiştir. Test altı sorudan oluşmaktadır. Testteki geometri sorularından örnek bir soru şöyledir: “‘Bir üçgende iki iç açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü üçüncü açının ölçüsünün yarısının 90° fazlasıdır.’ önermesinin doğruluğunu gösteriniz.” Testte yer alan cebir sorularından bir örnek “‘Tamsayılar kümesi üzerinde 3 ve 4 ile bölünebilen her sayı 12 ile bölünebilir.’ İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.” şeklindedir. Araştırmacılar test geliştirme sürecinde belirtke tablosu hazırlanmış ve her bir madde için kapsam geçerlik oranının .50-1.00 aralığında değiştiği belirlenmiştir. 6 soru için ortalama Kapsam Geçerlik İndeksi değerini .72 olarak hesaplamışlardır. Araştırmacılar testi 80 öğretmene uygulayarak Açıklayıcı Faktör Analizi (AFA) ve madde analizlerini yapmıştır. Yaptıkları AFA sonucunda testin tek faktörlü yapıda olup toplam varyansın %41.41’ini açıkladığını bulmuştur. Araştırmacılar madde ayırt ediciliğinin hesaplanmasında örnekleme üst grup ve alt grup olarak ayırmış, aralarındaki farka t testi ile bakmıştır. Yaptıkları analiz sonucunda her bir maddenin ayırt edici olduğu belirlenmiştir. Hazırladıkları testin madde güçlük oranının .48-.80 aralığında olduğunu tespit etmiştir. Araştırmacılar testin iç tutarlığını sağlamak için Cronbach Alpha güvenirlik katsayısını .77 olarak hesaplamıştır. Bu çalışma için testin Cronbach Alpha iç tutarlık katsayısı .65 bulunmuştur. Field’a (2009) göre bu değer akademik başarı testleri için yeterli düzeydedir.

#### *Sesli Düşünme Protokolü*

Sesli düşünme protokolünde katılımcılara görüşmelerin kayıt altına alınacağı ve çalışmanın amacı hakkında bilgi verilmiştir. Katılımcılara süreçte düşündüklerinin hepsini sesli olarak ifade etmesi gerektiği vurgulanmıştır. Sesli düşünme protokolünde bireyin ne yaptığından ziyade, ne düşündüğünü ifade etmesinin beklendiği belirtilmiştir. Sesli düşünme protokolünde iki etkinlik kartı ve yarı yapılandırılmış gözlem formu kullanılmıştır. Katılımcılara ilk olarak 1. önermenin yer aldığı etkinlik kartı verilmiş, bu etkinlik kartındaki önermenin ispatını tamamlamasının ardından 2. önermenin yer aldığı etkinlik kartı verilmiştir. Katılımcılardan etkinlik kartı üzerinde çalışmalarını istenmiştir. Bu aşamada katılımcıların ifadeleri ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınırken, katılımcıların davranışları ve yaptıkları işlemler gözlemlenmiştir. Süreç boyunca katılımcılara yaptığı işlemlerin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında herhangi bir bilgi verilmemiştir. Katılımcılara “Önerme doğru mudur, neden?”, “Yapmış olduğunuz ispat geçerli midir? Neden, nasıl karar verdiniz?”, “Yaptığımız işlemleri neden yaptınız?”, “Yazmış olduğunuz ispatta genelleme var mıdır? Genellemeye gerek var mıdır? Varsa nasıl genelleyebilirsiniz?” gibi sorular sorularak düşüncelerinin tam olarak anlaşılması amaçlanmıştır.

#### *Etkinlik Kartı*

Etkinlik kartının oluşturulmasında ispat yapma teşhis testindeki sorularla örtüşen iki cebir önermesi hazırlanmıştır. Önermeler seçilmeden önce benzer tarzda bazı önermeler kullanılarak seçilecek önermelerin nasıl olması gerektiğini belirlemeye yönelik altı ortaöğretim matematik öğretmeniyle informal görüşmeler yürütülmüştür. Görüşmeler sonucunda seçilen iki önerme kullanılmıştır. Önermeler ve seçilme nedenleri aşağıda açıklanmıştır.

Önerme 1: “Birden başlayarak  $n$ 'ye kadar olan ( $n$ -tek sayı) ardışık tek sayıların toplamını veren formülü bulunuz.”

Bu önermenin seçilmesinin temel nedeni hem önermenin hem de ispatının eğitim ortamının her kademesinde karşılaşılabileceği muhtemel olmasıdır. Soru ispat kavramının anlamını ortaya koyması bakımından önemlidir. Çünkü önerme, eşitliğin ikinci tarafı verildiğinde tümevarım yoluyla kolaylıkla ispatlanabilirken soruda verilen haliyle tümevarım yönteminin uygulanması uygun değildir. Önerme üst düzey bilgi gerektirmemekte olup, temel bilgi ve düşünme gerektirmektedir. Üst düzey bilgi gerektiren sorularda katılımcıların daha azı ispatı yapabileceğinden düşünme süreçlerini belirlemek veya veri elde etmek güçleşmektedir. Bu nedenle üst düzey bilgi ve beceri gerektirmeyen bir önerme seçilmiştir. Önermenin ispatı belli stratejilerle tamamlanacak olup, içgörü problemi tarzında değildir. Bilişsel yapıyı inceleyen Psikoloji araştırmalarında genellikle iç görü tarzında olmayan problemler seçilmektedir (Goldstein, 2013). Çünkü iç görü tarzında olan problemlerin çözümü aniden ortaya çıkar ve bu esnada becerileri belirlemek zor hatta mümkün olmamaktadır (Goldstein, 2013).

Bu sorunun seçimi, çalışma öncesinde yürütülen informal görüşmelere dayanmaktadır. Informal görüşmelerde katılımcılara *"2+4+6+...+2.n ifadesini en sade şekliyle yazınız?"*, *" $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $2+4+6+...+2.(n-1)+2n=n.(n+1)$  ifadesinin doğruluğunu gösteriniz?"* ve *"Çift sayıların toplamı formülünü oluşturunuz?"* şeklinde üç soru sorulmuştur. Sorunun genellikle tümevarım yöntemiyle çözüldüğü ve süreçte becerilerin yeterince tespit edilemediği görülmüştür. Sorunun tümevarım yöntemiyle doğruluğunun gösterimini engellemek için, soru eşitlik formundan çıkarılmıştır. Önermenin bilişsel açıdan ispat yapma sürecini ne derece ortaya koyabileceğine yönelik çalışmanın yürütücüsü olmayan bir matematik eğitimcisi bir de bilişsel psikoloji uzmanı öğretim üyesinin görüşlerine başvurulmuştur. Öğretim üyelerinden alınan görüşler doğrultusunda sorunun bilişsel süreci incelemek için uygun olduğu belirlenmiştir. Hazırlanan etkinlik kartı dört öğretmene uygulanmış ve sorunun dilinin yeterince anlaşılır olduğu belirlenmiştir.

Önerme 2: *" $a, b \in \mathbb{Z}^+$  ve  $a$  ile  $b$  arasında asal olmak üzere  $a|c$  ve  $b|c$  ise  $a.b|c$  dir." önermesinin doğruluğunu gösteriniz?"*

Bu soru katılımcıların sezgisel olarak veya birkaç örnekle beraber önermenin doğruluğunu kolaylıkla fark edebileceği; ancak sembolik olarak ifade etmede güçlük yaşayabilecekleri bir önermedir. Önerme, ispat adımlarından en sonuncuya gelinceye kadar cebirsel işlemlerle birlikte kolayca ilerlemektedir. Ancak son adımda ispatın tamamlanabilmesi için bir yardımcı teoremin lemmasının - "Sıfırdan farklı iki doğal sayının her ortak böleni, ortak bölenlerin en büyüğünün de bölenidir."- bilinmesi gerekmektedir. Önerme, iç görü problemi tarzında olmayıp bölünebilmenin tanımı ve bir yardımcı teorem (lemma) kullanılarak ispatlanabilmektedir.

Bu sorunun seçimi çalışma öncesinde yürütülen informal görüşmelere dayanmaktadır. Informal görüşmelerde *" $\forall x \in \mathbb{R}$  ve  $x \neq 0$  olmak üzere  $\forall z \in \mathbb{R}$  için  $z/x = y$  olacak şekilde bir tek  $y \in \mathbb{R}$  olduğunu gösteriniz?"*, *" $a \in \mathbb{Z}^+$  ve  $b \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $a|c$  ve  $b|c$  ise  $a.b|c$  dir. Önermesinin doğruluğunu gösteriniz?"* ve *"Tamsayılar kümesi üzerinde 3 ve 4 ile bölünebilen her sayı 12 ile bölünebilir." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz."* soruları sorulmuştur. Informal görüşmelerde katılımcıların seçilen önermenin ispatını yaparken oldukça kolay gördükleri ve ispatını yapabileceklerini düşündükleri; ancak ispatın son aşamasına gelindiğinde sadece sözel olarak ifade edebildikleri, sembolik dili kullanamadıkları saptanmıştır. Bu doğrultuda bu sorunun etkinlik kartında yer alacak olmasının buradaki durumu ortaya çıkarma açısından gerekli olduğu düşünülmüştür. Önermenin bilişsel açıdan ispat yapma sürecini ne derece ortaya koyabileceğine yönelik bir matematik eğitimcisi bir de bilişsel psikoloji uzmanı öğretim üyesinin görüşlerine başvurulmuştur. Öğretim üyelerinden alınan görüşler doğrultusunda sorunun bilişsel süreci incelemek için uygun olduğu belirlenmiştir. Hazırlanan görüşme formu dört öğretmene uygulanmış ve sorunun dilinin anlaşılır olduğu belirlenmiştir.

#### Gözlem

Gözlem formunun hazırlanma sürecinde etkinlik kartının geliştirilmesinde yapılan informal görüşmelerden yararlanılmıştır. Informal görüşmelerde ilk olarak yapılandırılmamış gözlem yapılmıştır. Bu aşamada öğretmenlerin ispat yaparken sergilediği beceriler not alınmıştır. Alınan notlardan ve alan yazından faydalanılarak gözlem formu oluşturulmuştur. Öğretmenlerin ispat yapma



sürecinde sergilemiş olduğu becerilere uygun olarak gözlem formu yarı yapılandırılmış forma dönüştürülmüştür. Gözlem formu iki bölümde hazırlanmıştır. Formun bir bölümü öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının süreçte sergilemiş olduğu becerileri inceleyecek biçimde likert olarak tasarlanmıştır. Bölüm üçlü likert tipinde tasarlanmıştır. Değerlendirme ölçütleri “0, 1, 2” şeklinde derecelendirilmiştir. Katılımcı; belirtilen beceriyi hiçbir soruda sergilemezse “0”, soruların birinde sergilerse “1”, soruların ikisinde sergilerse “2” seçeneği işaretlenmiştir. “1” seçeneği işaretlendiğinde seçeneğin yanına becerinin hangi soruda sergilendiği yazılmıştır. Diğer bölümü ise süreçte ortaya çıkabilecek ancak likert bölümünde yer almayan becerileri not alabilecek açıklama bölümü şeklinde tasarlanmıştır. Becerilerle ilgili açıklama gerektiren bir durum olduğunda, formun açıklama bölümünde kayıt altına alınmıştır.

### ***Araştırmacı Rolü***

Bu çalışmada araştırmacı katılımcı olmayan gözlemci rolündedir. Araştırmacı sesli düşünme protokolünde katılımcının görüşlerini ortaya çıkaracak sorular sormuş; ancak katılımcıların verdikleri cevaplara hiçbir şekilde müdahil olmamıştır. Araştırmacı çalışmanın katılımcılarıyla ortama uyum sağlamak için herhangi bir girişimde bulunmamıştır. Çalışmada katılımcılardan gözlem için izin alınmış olup, katılımcılar gözlemlendiklerinin farkındadırlar.

### ***Süreç***

“İspat Yapma Becerisi Teşhis Testi”nin katılımcılara uygulanmasında katılımcılara çalışma hakkında bilgi verilmiş ve çalışmanın iki aşamalı olduğu seçilen katılımcıların ikinci aşamaya da katılması gerektiği belirtilmiştir. İkinci aşamaya katılmayacağını belirten öğretmenler ve öğretmen adayları çalışma örnekleminde çıkarılmıştır. İspat yapma becerisi teşhis testi katılımcı öğretmenlere görev yaptıkları okulun öğretmenler odasında, öğretmen adaylarına ise öğrenim gördükleri üniversitenin dersliklerinde 1. araştırmacının gözetiminde uygulanmıştır. Test için katılımcılara 40dk süre verilmiş, tamamlayamayanlar için ek süre verilmemiştir.

Çalışmanın nitel bölümünde (ikinci aşamada) sesli düşünme protokolü uygulanmadan önce seçilen katılımcılardan ses kaydı yapmak için izin alınmıştır. Katılımcıların tümü ses kaydı yapılmasına izin vermişlerdir. Süreçte katılımcılara etkinlik kartları verilmiş ve düşüncelerini ortaya çıkarmaya yönelik sorular yöneltilmiştir. Uygulama öğretmenlerle görev yaptıkları okulların öğretmenler odasında öğretmenlerin ders süreleri dışında yürütülmüştür (Her bir öğretmenle farklı günde uygulama yapılmıştır). Öğretmen adaylarına ise uygulama, öğrenim gördükleri fakültenin misafir öğretim elemanı odasında yapılmıştır (Ders süreleri dışında uygun oldukları zaman diliminde yapılmıştır). Uygulama son sınıf öğretmen adaylarıyla iki günde, 1. sınıf öğretmen adaylarıyla üç günde tamamlanmıştır.

### ***Verilerin Analizi***

Karma yöntem araştırmalarının veri analizi, bu yöntemin modellerinden tercih edilen modele göre yapılmalıdır (Creswell ve Plano Clark, 2014). Bu çalışmada açıklayıcı ardışık desen kullanıldığı için bu desene uygun analiz yapılmıştır. Açıklayıcı ardışık desende veri analizi “nicel veri analizi → nitel veri analizi → nicel ve nitel verilerin ilişkilendirilmesi” şeklinde ilerlemektedir (Creswell, 2017). Bu doğrultuda bu bölümde ilk olarak nicel verilerin nasıl analiz edildiği açıklanmış ardından nitel verilerin nasıl analiz edildiği sunulmuş. Mevcut çalışmanın nicel kısmının analizi alan yazındaki çalışmalarda olduğu gibi betimsel ve kestirimsel istatistik kullanılarak yapılmıştır. Nitel kısmında ise içerik analizi uygulanarak veriler katılımcıların seviyelerine göre karşılaştırılmıştır. Ayrıca tüm soruları içine alan karşılaştırma tabloları sunulmuştur. Son olarak nitel ve nicel veri ilişkilendirilmiştir.

### ***Nitel Verilerin Analizi***

Nitel verilerin analizinde “İspat Yapma Becerisi Teşhis Testi” ile toplanan veriler kullanılmıştır. Elde edilen verilere betimsel istatistik ve kestirimsel istatistik uygulanmıştır. Betimsel istatistik sonucunda çalışmanın nitel bölümüne katılacak bireyler seçilmiştir (Katılımcılar bölümünde gruplama ayrıntılı olarak açıklanmıştır). Kestirimsel istatistik ile grupların (öğretmenler, son sınıf öğretmen adayları ve 1. sınıf öğretmen adayları) testten aldıkları puanlara göre karşılaştırma yapılmıştır.

Gruplara göre karşılaştırma yapmak için; ilk olarak verilerin normallik varsayımlarını sağlayıp sağlamadığı sınınanmıştır. Bunun için hem gruplar içi hem de tüm verilerin normallik varsayımlarına bakılmıştır. Normallik varsayımları için sırasıyla Kolmogorov-Smirnov testi yapılmış, basıklık ve çarpıklık değerleri incelenmiş, daha sonra histogram grafiğine bakılmış ve son olarak Q-Q ve P-P grafiklerine bakılmıştır. Yapılan bu işlemler sonucunda toplanan verilerin normallik şartlarını sağladığı görülmüştür. Varyansların homojenliği ve verilerin bağımsızlığı varsayımları da sınınanmış olup, şartlar uygun olduğu için Tek Yönlü Varyans Analizi (ANOVA) testi yapılmıştır. Anlamlı farklılık bulunan gruplar arasında ise varyansların eşit olmadığı durumda kullanılan Games-Howell testi kullanılmıştır. Bu test küçük örneklemlerde kullanılan testler arasında en güçlüsü (Field, 2009) olduğu için tercih edilmiştir.

#### *Nitel Verilerin Analizi*

Nitel verilerin analizinde içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Bunun için ilk olarak sesli düşünme protokolünde elde edilen veriler çözümlenmiştir. Çözümlenen veriler birinci araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Kodlamalar sonucu oluşan kod matrisi matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesine sunulmuş verilerin %25'i için kodlama yapması istenmiştir. Ardından kodlayıcılar arası güvenilirlik [(Ortak görüş sayısı/Toplam görüş sayısı)X100] formülü kullanılarak hesaplanmıştır. Yapılan hesaplama sonucunda kodlayıcılar arası uyum .79 olarak hesaplanmıştır. Miles ve Huberman'a (2015) göre bu değer güvenilirlik için yeterlidir. Ortak görüş belirtilmeyen kodlarda araştırmacı ve uzman bir araya gelerek kodun kalmasına, değiştirilmesine veya çıkarılmasına karar vermiştir. Sesli düşünme protokolünün kodlanmasının ardından gözlem formları ve etkinlik kartı (doküman) incelenerek sesli düşünme protokolünde tespit edilemeyen veriler kodlamaya katılmıştır. Alan yazın göz önüne alınarak kodların isimleri değerlendirilmiştir. Örneğin, çalışmada ilk olarak "daha önce kullandığı ve doğru sonuca ulaştığı çözümü, yeni karşılaştığı probleme aktarır kodu" elde edilmiştir. Alan yazın incelendiğinde bildiği bir yolu düzenleyerek yeni çözüm yolu üretmenin analojik akıl yürütme olarak adlandırıldığı belirlenmiştir. Bu nedenle kodun ismi değiştirilerek "Analojik akıl yürütme yapar" ifadesine dönüştürülmüştür. Kodlamalar sonucunda kategoriler oluşturulmuştur. Kategoriler benzer kodların bir araya getirilmesi sonucunda oluşturulmuştur. Son olarak kategoriler ortak özelliklerine göre bir araya getirilerek bilişsel beceriler ve üst bilişsel beceriler temalarında toplanmıştır.

#### *Nicel ve Nitel Verilerin İlişkilendirilmesi*

Çalışmada nicel verilerin nitel verilerle ilişkilendirilmesi iki türlü gerçekleşmiştir. Bunlardan ilki araştırmanın nicel bölümünün sonuçlarına göre nitel bölümün katılımcılarının seçilmesidir. Bu kısım katılımcılar bölümünde açıklanmıştır. İkincisi ise katılımcıların ispat yapma başarı düzeyleri ile bilişsel-üst bilişsel becerilerinin karşılaştırılmasıdır. Bu aşamada matematik öğretmenlerinin, son sınıf matematik öğretmen adaylarının ve 1. sınıf matematik öğretmen adaylarının ispat yapma becerileri ile bilişsel-üst bilişsel becerileri beraber incelenmiştir.

#### *Geçerlik ve Güvenirlik*

Çalışmada dış geçerliği sağlamak için örneklem detaylı biçimde tanımlanmış ve katılımcı özellikleri tüm detaylarıyla ortaya konulmuştur. Bunun yanı sıra veri toplamada farklı veri toplama araçları bir arada kullanılmış ve katılımcıların görüşleri ile etkinlik kartlarından görsellere yer verilmiştir. İç geçerliğin sağlanmasında üç yöntem kullanılmıştır. Bunların ilki metodolojik çeşitleme yapılmasıdır. Çalışmada sesli düşünme protokolü, gözlem ve etkinlik kartı birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Bu şekilde üç veri toplama aracında toplanan verilerin örtüşen ve farklı olan kısımları ortaya konulmuştur. İkincisi katılımcı doğrulamasıdır. Bunun için kodlama sonrasında katılımcılarla tekrar görüşülerek sesli düşünme protokolünde kurduğu cümlelerden çıkarılan kodlar kendilerine sunulmuş doğruluğunu uygun/uygun değil şeklinde değerlendirmeleri istenmiştir. Katılımcıların tamamı kodlamaların tamamı için uygun olduğu yönünde görüş belirtmişlerdir. Üçüncüsü araştırmacı çeşitlemesidir. Bunun için veri toplama süreci ayrıntılı biçimde betimlenmiş ve çalışma sürecinin tamamı alanında uzman bir öğretim üyesine kontrol ettirilerek ilenmiştir.

Çalışmanın dış güvenirliğini sağlamak amacıyla veri toplama sürecinde yapılan görüşmeler ses kayıt cihazıyla kayıt altına alınmıştır. Ayrıca doğrudan aktarmaların sunumunda görüşme süresi ve transkriptte ifadenin geçtiği satırın numarasına yer verilmiştir. İç güvenirliği sağlamak için araştırma problemine uygun araştırma modeli kullanılmış, seçilen araştırma modeline uygun olarak katılımcılar ve veri toplama araçları belirlenmiştir. Toplanan veriler de araştırma problemine uygun olarak analiz edilmiştir. Ayrıca çalışmanın genellenebilirliğini arttırmak amacıyla karma araştırma yöntemi belirlenmiştir.

### Bulgular ve Tartışma

Çalışmada elde edilen bulgular araştırma problemlerine uygun olarak sunulmuştur. Bunun için ilk olarak nicel verilerden elde edilen bulgular sunulmuştur. Ardından nitel verilerden elde edilen bulgular bilişsel beceriler ve üst bilişsel beceriler temaları altında açıklanmıştır. Son olarak nicel ve nitel verinin karşılaştırması bölümüne yer verilmiştir.

#### *Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Becerilerinin Farklı Seviye Gruplarına Göre Karşılaştırılması*

Çalışmanın bu bölümü nicel verilerden elde edilen bulgulara göre sunulmuştur. Betimsel istatistik bulguları Tablo 2’de sunulmuştur.

**Tablo 2.** İspat Yapma Teşhis Testi Puanlarına Yönelik Betimsel İstatistik Sonuçları

	N	$\bar{X}$	SS	Alt ve Üst Sınır
Öğretmen	25	20.28	8.58	[16.74, 23.82]
Son sınıf öğretmen adayı	29	16.69	6.07	[14.38, 19.00]
1. sınıf öğretmen adayı	19	11.89	3.74	[10.09, 13.70]
Toplam	73	16.67	7.27	[14.97, 18.37]

Tablo 2 incelendiğinde ortalama puanların en yüksek olduğu grubun öğretmenler ( $\bar{X} = 20.28$ ), sonra son sınıf öğretmen adayları ( $\bar{X} = 16.69$ ) ve en düşük ortalamasının da 1. sınıf öğretmen adaylarında ( $\bar{X} = 11.89$ ) olduğu belirlenmiştir. Varyans analizi sonuçları Tablo 3’de sunulmuştur.

**Tablo 3.** Varyans Analizi Sonuçları

	Kareler toplamı	sd	Kareler ortalaması	F	p	$\eta^2$	Anlamlı fark
Gruplar arası	759.073	2	379.54				
Grup içi	3051.036	70	43.59	8.708	.000	.45	Ö-ÖA <sub>1</sub>
Toplam	3810.110	72					ÖAS-ÖA <sub>1</sub>

Tablo 3 incelendiğinde, ispat yapma teşhis testi puanlarının gruplara göre farklılaşp farklılaşmadığını ortaya çıkarmaya yönelik yapılan tek faktörlü varyans analizi sonucunda gruplar arasındaki farkın anlamlı olduğu belirlenmiştir ( $F(2,70) = 8.71, p < .05, \eta^2 = .45$ ). Games-Howell testi sonucunda öğretmenler ile 1. sınıf öğretmen adayları ve son sınıf öğretmen adayları ile 1. sınıf öğretmen adayları arasındaki farklılığın anlamlı düzeyde olduğu belirlenmiştir. Buna göre hem öğretmenlerin hem de son sınıf öğretmen adaylarının ispat yapma teşhis testi başarı puanı ortalamalarının 1. sınıf öğretmen adaylarından anlamlı düzeyde yüksek olduğu; öğretmenler ile son sınıf öğretmen adayları arasındaki farklılığın ise anlamlı düzeyde olmadığı belirlenmiştir.

#### *Bilişsel Beceriler Temasında Elde Edilen Bulgular ve Tartışması*

Bilişsel beceriler teması incelendiğinde, bu temada “İspat önermesini okuma”, “Doğruluğunu değerlendirme”, “Strateji belirleme”, “İşlem süreci” ve “Sezgisel kestirme yolları” olarak beş kategoriye ulaşılmıştır.



İspat önermesini okuma kategorisinde ulaşılan bir başka beceri “Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder.” becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan ÖAS<sub>D2</sub> sesli düşünme protokolünde önermeyi okuduktan sonra “[27.21] 1’den başlayormuş, n’ye kadarmış, n tek sayıymış, ardışık doğal sayıların toplamını istiyormuş... (Satır, 151-152)” cümlelerini kurmuştur. Bu ifadeler öğretmen adayının önermeyi kendi cümleleriyle ifade ettiğini göstermektedir. Bu cümlelerin devamında öğretmen adayı “...Birkaç deneme yapmak istiyorum. (Birkaç deneme yapar)... 1’in karesi, 2’nin karesi, 3’ün karesi diye devam edecek. Belli ki bundan sonrakiler içinde böyle devam edecek. Yani terim sayısının karesi olarak devam edecek. Böyle olduğunu hissediyorum. (Satır, 156-158)” ifadesini kullanmıştır. Bu ifadeler önermenin doğruluğunu öğretmen adayının sezgisel olarak hissettiğini göstermektedir. Bir başka ifadeyle öğretmen adayı “Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder.” kodunu sergilemiştir. Bu beceriler sadece 1. önermede tespit edilmiştir. “Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder.” becerisi herhangi bir üst bilişsel aktivite gerektirmediğinden (öğretmen adayının ifadesine göre otomatikleşmiş bir beceri olup sadece sezgilere dayalı olduğundan) bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Alan yazında bu beceri genellikle üst bilişsel beceri olarak belirtilmiştir (Aydemir ve Kubanç, 2014; Cozza ve Oreshkina, 2013; Schraw ve Dennison, 1994). Bu bağlamda “Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder.” becerisinin bilişsel olarak belirlenmesi sözü geçen çalışmaların sonuçlarıyla çelişmektedir. Bu durum becerinin bilişsel veya üst bilişsel olmasının kişiye bağlı olmasıyla ilgilidir. Başka bir ifadeyle beceriyi sergileyen kişinin ne düşünerek beceriyi sergilediği bilişsel-üst bilişsel ayrımında önemli olduğundan bu beceri çalışmada bilişsel olarak ele alınmıştır.

Bu kategorideki bir başka bilişsel beceri “İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler.” kodudur. Beceriyi sergilediği belirlenen ÖAS<sub>D1</sub>’in “[30.39] a ve b pozitif tam sayı ve aralarında asal... (Satır, 195), [30.49] ...a ile b aralarında asal... (Satır, 197), [30.49] ...a, c’yi bölüyorsa... (Satır, 200), [31.39] ... c, b’yi de bölüyorsa... (Satır, 203), [32.49] ... a.b, c’yi  $2k^2$ ’yi böler mi? Diyor... (Satır 212)” ifadeleri bu beceriye örnek olarak verilebilir. Yang (2012) çalışmasında bu beceriyi üst bilişsel olarak değerlendirmiştir. Ancak bu çalışmada katılımcıların kullandığı ifadelerden bu becerinin farkındalık gerektiren değil otomatikleşmiş bir beceri olduğu anlaşılmıştır. Otomatikleşmiş beceriler (veya düşünceler) kişinin bilişinde var olan, zihinde daha kolay ulaşılabilir, herhangi bir farkındalık gerektirmeyen becerilerdir. Bu nedenle çalışmada soruyu adım adım okuyarak ilerler becerisi bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

İspat önermesini okuma kategorisinde ulaşılan bir başka bilişsel beceri “Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan ÖAS<sub>1</sub>’in “[10.49] 1’den başlayarak n’e kadar olan n-tek sayı... 1’den başlayan  $1+3+...+n$  n en son tek sayı... (Satır, 60-61)” cümlelerinden sonra “[14.28] ...1’den işte şu sayıya n’e kadar olan sayıların toplamı... (Satır, 77)” cümlelerini kullanması bu beceriyi sergilediğini göstermektedir. “Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür.” becerisi katılımcıların üst bilişsel düşünmesini gerektirmediğinden (katılımcılar dikkat eksikliğinden dolayı tekrar okumuşlardır veya anlayamadıklarını düşündükleri için bir süre düşünmüşlerdir) bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Yang (2012) verilenler üzerine düşünmenin planlama anlamında üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Bu becerinin bilişsel olarak değerlendirilmesi ilgili çalışmanın sonuçlarıyla çelişmektedir. Ancak çalışmada bu becerinin üst bellek aktivitesi olmadığı anlaşıldığından bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Üst bellek aktivitesi, bireyin kendi belleğindeki bilgilerin ve işleyişin farkında olup, bu işleyişi amaçlı biçimde yönlendirerek bilgiyi kullanabilmesidir. Hatırlama, farkında olma ve geri çağırma olarak üç aşamayı içeren bir süreçtir (Irak, 2005).

Bu kategoride ulaşılan bir başka bilişsel beceri ise “İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını belirler.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların bazılarının görüşleri Tablo 4’de sunulmuştur.



**Tablo 4.** “İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını belirler.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Bazılarının İfadeleri

Katılımcı		Önerme	Görüşü
ÖAS <sub>D2</sub>	1		“[27.21] ...1 den başlarsa ardışksa; 1 dir, 3 tür, 5 tir, 7 dir, 9 dur, 11 dir, 13 tür ve en son n dir. Burada n tekmiş. Tek sayı. Şimdi bu toplamı veren formülü bulmalıyız. n işlem basamağının son adımı gözümün önünde bulunması iyi olacak. (Satır, 152-154)”
ÖO <sub>2</sub>	2		“[24.14] ... Ben şunu göstereceğim: acaba a.b, c’yi böler mi? Yani şunu gösterebilirim c=a.b.m olacak şekilde en az bir tane m eleman tamsayı olduğunu gösterebilirim eşitliğimi doğrulamış olurum. (Satır, 145-147)”

Tablo 4 incelendiğinde her iki önerme içinde “İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını belirler.” becerisini sergilediği belirlenen katılımcıların olduğu görülmektedir. Çalışmada elde edilen bu beceri formel ispat için genellikle otomatikleşmiş bir beceri olarak yapılan üst düzey düşünme becerisi gerektirmeyen bir beceridir. Bu nedenle bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Kaplan ve Duran (2015) ortaokul öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada hedef ve alt hedeflerin belirlenmesini üst bilişsel beceri olarak değerlendirmiştir. Sözü geçen çalışmanın sonuçları bu çalışmayla örtüşmemektedir. Çalışmalar arasındaki farklılığın örneklerden kaynaklandığı söylenebilir. Yani bu beceri ortaokul öğrencileri için üst bilişsel, öğretmen ve öğretmen adayları için bilişsel olabilir.

İlgili kategoride ulaşılan bir başka bilişsel beceri ise “İspatın anahtar kavramlarını belirler.” becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan ÖD<sub>2</sub> ile araştırmacı arasında geçen diyalog Şekil 2’de sunulmuştur (Satır, 55-59).

[15.55] ÖD<sub>2</sub>: a, c yi böler, b de c’yi böler. O halde a.b’de c’yi böler diyor. Değil mi? ...a ile b aralarında asal olduğuna göre onların OBEB’leri 1, OKEK’leri de sayıların çarpımlarına eşittir.  
 [17.25] A: Neden OBEB ve OKEK’den hareket ettiniz?  
 [17.28] ÖD<sub>2</sub>: Aralarında asal verdiğinde OBEB ve OKEK karşıtırdı bana. Buradan yola çıktığımızda OBEB’leri 1’e OBEB’leri de sayıların çarpımıdır. a, c’yi bölüyorsa b de c’yi bölüyorsa c bu sayıların ortak katı demektir.

**Şekil 2.** ÖD<sub>2</sub> ile Araştırmacı Arasında 2. Önermede Yaşanan Diyalogdan Bir Kesit

Diyalog incelendiğinde öğretmenin en büyük ortak bölen (OBEB) ve en küçük ortak kat (OKEK) kavramlarını ispatın anahtar kavramları olarak belirlediği anlaşılmaktadır. Bu durum “İspatın anahtar kavramlarını belirler.” becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır. Bu becerinin çalışmada bilişsel olarak sergilendiği belirlenmiştir. Şahin (2016) de matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yaparken ispatın anahtar kavramlarını belirlediklerini saptamıştır. Raman (2003) ispatın anahtar kavramını belirlemenin sezgisel bir durum olduğunu ifade etmiştir. Bu anlamda ispatın anahtar kavramını belirler becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesi Raman’ın (2003) çalışmasını desteklemektedir.

İspat önermesini okuma kategorisinde ulaşılan son beceri ise “İspatın hipotez ve hükümünü belirlemek için önermenin altını çizer.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan Öİ<sub>2</sub> ile araştırmacı arasında geçen diyalog Şekil 3’deki gibidir (Satır, 79-83).

- [18.43] A: Bu soruda da önermenin altını çizdiniz hocam. Neden?  
 [18.45] Ö<sub>2</sub>: Yine sonunu yuvarlak içine aldım hocam. Bizden ne istediğini belirtmek için yapıyorum. Buraları çizmemin sebebi de n'ye kadar olan n tane tek sayı diyor yani soruların kaç tane olduğunu anlamak için.  
 [19.02] A: Yani yuvarlak içine aldığınız yer daha önemli bir yer, altını çizdiğiniz yer önemli bir yer öyle mi?  
 [19.04] Ö<sub>2</sub>: Yani öyle de söylenebilir ama daha çok hipotez hüküm gibi de düşünebiliriz.

### Şekil 3. Ö<sub>2</sub> ile Araştırmacı Arasında 1. Önermede Yaşanan Diyalogdan Bir Kesit

Diyalog incelendiğinde katılımcının “İspatın hipotez ve hükmünü belirlemek için önermenin altını çizer.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Çalışmada katılımcının bu beceriyi otomatikleşmiş bir beceri olarak gerçekleştirdiği anlaşıldığından kod bilişsel beceriler temasında değerlendirilmiştir. Erdem (2005) metni okurken altını çizmenin hedefleri belirleme açısından önemli olduğunu; ancak bu becerinin otomatikleşmiş beceri haline getirildiğinde gerekli olmayan bölümlerinde altının çizilebildiğini ifade etmiştir. Bu çalışmada katılımcıların otomatikleşmiş bir beceri olarak bu beceriyi sergilediği belirlendiğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Bu doğrultuda ulaşılan sonucun sözü geçen çalışmanın bulgularını desteklediği söylenebilir.

Çalışmada bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir diğer kategori “Doğruluğunu değerlendirme” kategorisidir. Bu kategoride “Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.”, “Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir.”, “İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu otoriteye sorar.”, “Otoriter ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.”, “Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.”, “İşlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirir.” ve “İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir.” bilişsel becerilerine ulaşılmıştır.

Bu kategoride ulaşılan ilk bilişsel beceri “Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>D2</sub>'nin “[21.15] *Doğru ama geçerli midir bilmem. Geçerliğini alandaki uzman kişiler bilebilir. (Satır, 69)*” ifadeleri ile ÖAS<sub>D2</sub>'nin “[42.41] *Geçerli değildir. Yani bir şeylerin doğruluğunu sembolik olarak gösterdim ama bunu matematiksel anlamda yazamadım galiba. (Satır, 202-203)*” ifadeleri bu beceriye örnek olarak verilebilir. İfadeler incelendiğinde katılımcıların yaptıkları ispatın doğruluğundan emin olmadıkları veya geçerli olmadığını düşündükleri anlaşılmaktadır. Ritüel ispat şemasında göre gerekçelendirme yaptıkları anlaşılan katılımcıların sergiledikleri beceri “Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” kodu olarak adlandırılmıştır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların ispatı gerekçelendirirken kararsızlık yaşadıkları, doğruluğundan emin olmadıkları ve yaptıkları ispatın doğruluğundan emin olmadıkları belirlenmiştir. Bu nedenle bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Alan yazındaki çalışmalar katılımcıların bu beceriyi sergilediğini göstermektedir (Doruk ve Kaplan, 2015; Doruk, 2016; Harel ve Sowder, 1998; Martin ve Harel, 1989). “Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” bulgusunun alan yazını desteklediği söylenebilir.

Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde ulaşılan bir diğer bilişsel beceri ise “Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların bazılarının görüşleri Tablo 5’de sunulmuştur.

**Tablo 5.** “Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Bazılarının İfadeleri

Katılımcı	Önerme	Görüşü
ÖAS <sub>01</sub>	1	“[39.46] Şunu anlıyorum aslında: iki asal sayı bir sayıyı bölüyorsa çarpımının da böyleceğini. Aslında şuradan anlıyorum, k yerine x+1 yazdığımda c, a.b'nin bir katı geliyor. Aynı şekilde f'de x'in katı olduğu için c yine a.b'nin bir katı olmak zorunda. Ama bunları yazıya dökemiyorum hocam.” (Satır, 98-101)
Ö <sub>01</sub>	2	“[23.13] Şimdi hem a hem de b, c'yi bölüyorsa ve a ile b aralarında asalsa demek ki c'nin a ve b olarak iki tane çarpanı olmak zorundadır. Dolayısıyla c'nin a ve b gibi en az iki çarpanı varsa a.b'nin de c'yi vermesi zorunludur. Ama bunu ispat etmemiz lazım.” (Satır, 105-107)

Tablo 5 incelendiğinde her iki önerme içinde “Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir.” becerisini sergilediği belirlenen katılımcıların olduğu görülmektedir. Bu beceri matematiksel ispatın geçerli olmasını sağlamamaktadır. Aynı zamanda üst düzey düşünme becerisi gerektirmeyip sadece iç sezilere dayalıdır. Bu nedenle bilişsel beceri olarak ele alınmıştır. Samper ve diğerleri (2016) yaptıkları çalışmada katılımcıların sezgisel olarak ispat yapmaya çalıştıklarını belirlemiştir. MacDonald (1973) sezgisel ispatın hafife alındığı kadar kolay olmadığını belirtmiş ancak bu ispat türünün öğretici bir rol üstlenmesine karşın gerçek anlamda bir ispat niteliği taşımadığını belirtmiştir.

Bu kategoride ulaşılan bir başka bilişsel beceri ise “İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu otoriteye sorar.” kodudur. Bu beceriyi her iki önerme içinde sergilediği belirlenen Ö12'nin “[18.18] *Doğru anladım değil mi hocam, n'ye kadar olan ardışık tek sayıların... 1'den başlayıp.* (Satır, 78)” ifadelerinden bu beceriyi 1. Önermede sergilediği; “[32.07] *Hocam en son noktada (k.t)/c mi geldi? Doğru mu hocam?...* (Satır, 135)” ifadelerinden de 2. önermede sergilediği belirlenmiştir. Bu beceri kişinin kendini değerlendirmesini veya sorgulama yapmasını içermediğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Şahin'de (2016) matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinin doğruluğunu araştırmacıya sorduğunu belirlemiştir. Bu anlamda ispat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu otoriteye sorar becerisinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir. Çalışma sürecinde araştırmacı ile katılımcı arasındaki diyalog sürecinde katılımcı araştırmacıyı otorite olarak gördüğünden doğruluğunu araştırmacıya sormaktadır. Başka bir ifadeyle katılımcı burada bir otoriteye (bu otorite bazen bir öğretmen olabileceği gibi bazen de kitap vs. gibi materyaller olabilir) başvurma yoluna gitmiştir. Öğrenci burada aynı soruyu kendisine yöneltmiş olsaydı katılımcının sorgulama yaptığı değerlendirilerek bu beceri üst bilişsel olarak kabul edilebilirdi. Ancak bu haliyle katılımcının bir otoriteye teyit ettirmeye çalıştığı anlaşıldığından bu beceri bilişsel olarak sınıflandırılmıştır.

Bu kategoride ulaşılan “Otoriter ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” kodu yalnızca 1. Önermede tespit edilebilmiştir. Bu beceriyi sergileyen ÖD1 “[11.05] *İspatın geçerli olabilmesi için, 1'den n'e kadar olanların toplamının doğru olduğunu göstermek gerekir. Ben bunu o teoreme dayandırarak ispatladığım için sıkıntı yok.* (Satır, 48-49)” ifadelerini kullanmıştır. Öğretmenin ifadelerinden ispatın gerekçelendirilmesini yaparken ezberlediği bir teoreme dayandırdığı anlaşılmaktadır. İspat gerekçelendirilirken ezberlenen teorem, formül veya kurala dayandırılması otoriter ispat şemasına göre gerekçelendirme olarak ele alınmaktadır. Öğretmenin kullandığı ifadeler ve otoriter ispat şemasının tanımı göz önüne alındığında öğretmenin “Otoriter ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Çontay'da (2017) ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını araştırdığı çalışmasında, öğretmen adaylarının ispat yaparken otoriter ispat şemasını kullandığını belirlemiştir. Otoriter ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir becerisi kişinin üst düzey akıl yürütme becerisini gerektirmeyip bir otoriteye dayalı değerlendirme yapmasını gerektirdiğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir.

İspat yapma sürecinde sergilediği belirlenen bir başka bilişsel beceri “Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” becerisidir. Bu beceriye örnek olarak ÖA102'nin kullandığı “[00.51] *Sadece formüllü yazdığım zaman ispat olmaz.* (Satır, 6)... [00.58] *Değer vererek en fazla ispatlayabilirim.* (Satır, 8)... [01.02] *Mesela 1'den n'ye kadar demiş. 1'i verdiğimiz zaman 2-1 den 1 olur. Sonra 2'yi verirse 4-1 den 3 olur. Mesela 15'i versek 30-1=29 bu şekilde olur.* (Satır, 10-11)” ifadeler verilebilir. Katılımcının ifadeleri incelendiğinde birkaç örnek vererek sonuca ulaşmaya çalıştığı anlaşılmaktadır. Birkaç örnek vererek ispat gerekçelendirme yapma tümevarımsal ispat şeması (örnek temelli) olarak adlandırılmaktadır. Bu nedenle katılımcının ifadeleri, onun “Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır. Smith ve Kosslyn (2014) tümevarımsal akıl yürütmenin bilginin doğruluğu hakkında kesin bir sonuç vermediğini; ancak genel bir öngörü oluşturabileceğini ifade etmiştir. Goldstein (2013) tümevarımsal akıl yürütmenin genellikle farkında olmadan yapılan bir beceri olduğunu ifade etmiştir. Martin ve Harel (1989) öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmada öğretmen adaylarının yoğun bir şekilde bu beceriyi sergilediklerini belirlemiştir. Bu doğrultuda elde edilen becerinin bilişsel olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışmaları desteklediği söylenebilir.

Bu kategoride ulaşılan bir başka bilişsel beceri “İşlemlerini kontrol ederek doğruluğu değerlendirir.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan Ö<sub>D1</sub> ile araştırmacı arasındaki diyalog Şekil 4’de sunulmuştur (Satır, 39-41).

<p>[06.41] Ö<sub>D1</sub>: ...[İşlemleri yaparak anlatmaktadır]... Daha formülü bulamadık.  [08.05] A: Neden bulamadığınızı düşünüyorsunuz?  [08.11] Ö<sub>D1</sub>: Çünkü bu doğru bir şey değil. Bu formül ona eşit mi acaba?... [İşlemleri tekrar baştan yapmaktadır]...</p>
---

**Şekil 4.** Ö<sub>D1</sub> ile Araştırmacı Arasında 1. Önermede Yaşanan Diyalogdan Bir Kesit

Şekil 4’de ki diyalog incelendiğinde öğretmenin formülün eşitlili kontrol etmek için “İşlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirir.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceriyi sergileyen katılımcıların otomatikleşmiş beceri olarak işlemlerini kontrol ettiği ve doğruluğunu/yanlışlığını değerlendirdiği görülmüştür. Öztürk, Akkan ve Kaplan (2014) üstün yetenekli öğrencilerle problem çözmeye yönelik yaptıkları çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin değerlendirme sürecinde işlemlerini kontrol ettiklerini belirlemiş ve bu becerinin üst bilişsel olduğunu ifade etmişlerdir. Becerilerin farklı değerlendirilmesi örneklem özelliklerinin farklı olmasından kaynaklanmış olabilir.

Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde ulaşılan son bilişsel beceri “İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir.” kodudur. Örneğin, ÖASız’nin ifadeleri şöyledir (Satır, 65-69):

“[18.58] İşlemlerimi bir daha kontrol edeyim. 1’den  $(2t + 1)$  gibi herhangi bir tek sayıya kadar olan sayıların toplamına  $a$  dedim. O aradaki çift sayılara da  $b$  dedim.  $b$ ’yi 2 parantezine aldığım da bildiğim bir formüle ulaşıyorum. Bu formül 1 den  $n$ ’ye kadar olan sayıların toplamı formülü. Buradan  $b$ ’nin  $t^2 + t$ ’ye eşit olduğunu buldum. Denklemde  $b$ ’yi yerine yazarsam burdan  $a$  yı  $(t + 1)^2$  buluyorum. En başta  $n$  ye  $2t + 1$  demiştim o zaman  $(t + 1)$  de  $(n + 1)/2$  olur. Dönüştürdüğüm ifadeye tekrar ulaştım.”

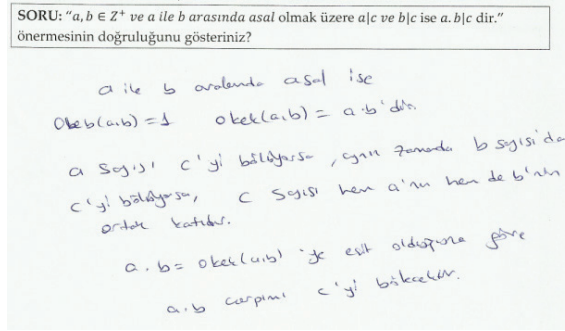
Katılımcının ifadeleri ve etkinlik kartı incelendiğinde ispatın doğruluğunu değerlendirmek için işlemlerin tamamını yeniden yaptığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle katılımcının “İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir.” becerisini sergilediği düşünülmüştür. Bu becerinin katılımcılar için üst düzey düşünme becerisi gerektirmediği belirlendiğinden bilişsel beceri kapsamında değerlendirilmiştir. Özkaya ve İşleyen’de (2012) yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda problem çözerken işlemlerini tekrar yaparak doğruluğunu değerlendirdiğini belirlemiştir.

Bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir diğer kategori “Strateji belirleme” kategorisidir. Bu kategoride “Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.”, “Ezberlediği yolla ispat yapar.” ve “İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir.” bilişsel becerilerine ulaşılmıştır.

Strateji belirleme kategorisinde ulaşılan bilişsel becerilerin ilki “Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.” kodudur. Bu beceriyi 1. Önermede sergilediği belirlenen katılımcılardan ÖA<sub>101</sub> düşüncesini şöyle ifade etmiştir (Satır, 37-41):

“[10.19]  $1+3+5+\dots+n$  ye kadar olsa mesela bunun terim sayısını bulsak son terim-ilk terim/ artış miktarı. Artış miktarı 2 oluyor. Mesela bunu getirip son terimle ilk terimin toplamının yarısı yaparsak  $(n+1)/2$  olur. Şurada da aynısını yapıyoruz. Son terimle ilk terimi topluyoruz ama toplam terim sayısının yarısı oluyor. O zaman şunu da 2 ye bölsük formülü belki bu şekilde elde edebilirim.”

Katılımcının ifadeleri incelendiğinde “Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. 2. Önermede bu beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>D2</sub> öğretmenin etkinlik kartına ait ekran görüntüsü Şekil 5’de sunulmuştur.



Şekil 5. ÖD<sub>2</sub>'nin Sözel Olarak Önermenin İspatını İfade Ettiğini Gösteren Ekran Görüntüsü

Şekil 5 incelendiğinde katılımcının “Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri matematiksel ispatın doğruluğunun değerlendirilmesinde bir anlam ifade etmediğinden bilişsel beceri olarak ele alınmıştır. Alan yazında bu becerinin sergilediğine yönelik bulgular mevcuttur (Nool, 2012; Şahin, 2016). Bu bağlamda matematik öğretmenlerinin ve öğretmeni adaylarının bu beceriyi sergilediklerinin tespit edilmesi alan yazını desteklemektedir.

Bu kategoride ulaşılan bir diğer bilişsel beceri “Ezberlediği yolla ispat yapar.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların bazılarının ifadeleri Tablo 6’da sunulmuştur.

Tablo 6. “Ezberlediği yolla ispat yapar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının İfadeleri

Katılımcı Önerme Görüşü	
ÖD <sub>2</sub>	1 “[13.29] Ardışık tek sayıların toplamını veren formül vardı. Terimler toplamı= Terim sayısı. Ortanca terim... Terim sayısı son terim-ilk terim/artış miktarı+1 diğeri de son terim+1/2 olup çarpacaktık. Yani bunu veren formül (n+1)/2'nin karesi olur.” (Satır, 48-50)
ÖA1D <sub>2</sub>	1 “[26.21] ...1'den başlıyormuş ardışık tek sayı dediği için 2, 2 ekleyeceğim. 1+3+5+7 diye gidiyor n ye kadar. Bunun formülü ezbere dayalı neydi hatırlamıyorum.” (Satır, 198-199)
ÖAS <sub>11</sub>	2 “[24.39] Yine b'de vardır şey m'de vardır. Burada zaten onun varlığını gösteriyoruz; ama çok mu kabul oluyor bilmiyorum. Bunun güzel bir ispatı vardı; ama şu an aklıma gelmiyor...” (Satır, 115-116)

Tablo 6 incelendiğinde katılımcıların “Ezberlediği yolla ispat yapar.” becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Bu beceri bireyin hafızasına dayalı bir beceri olup, katılımcıların hatırlayabildikleri kadarıyla ispatı yapabildiklerini göstermektedir. Bu nedenle beceri bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Şahin (2016) de matematik öğretmeni adaylarının ezberledikleri yolla ispat yaptıklarını belirlemiştir.

Strateji belirleme kategorisinde ulaşılan son bilişsel beceri “İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen ÖAS<sub>01</sub> “[27.04] Doğrudan olmayana ergi kullansam. Onu da çok yapabileceğimi düşünmüyorum açıkçası olmayana ergiden. (Satır, 77-78)” ifadelerini kullanmıştır. Öğretmen adayının ifadeleri incelendiğinde, farklı ispat stratejileri belirttiği ancak stratejiyi uygulayıp sonuca ulaşabilme noktasında kendisini yeterli görmediği anlaşılmaktadır. Bu durum öğretmen adayının “İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir.” becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır. Öz-yeterlik bir görevle daha uzun süre meşgul olmayı ve matematikte bir problemi çözemediğinde daha uzun süre üzerine çalışmayı sağlamaktadır (Bruning vd., 2014). Bu kod düşük öz-yeterlik içerdiğinden bireylerin önermeyle meşgul olma veya yapamadığında önermeyle ilgilenme süresini kısaltacaktır. Bu nedenle düşük öz-yeterlik üst bilişsel aktivite gerektirmeyip bilişsel olarak değerlendirilmiştir.



Bilişsel beceriler temasında ulaşılan kategorilerden bir diğeri “İşlem süreci” kategorisidir. İşlem süreci kategorisinde “İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür.”, “Örüntü genelleme yapar.” ve “Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder.” kodlarına ulaşılmıştır.

İşlem süreci kategorisinde elde edilen bilişsel becerilerden ilki “İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür.” kodudur. Bu inanişe sahip olduğu belirlenen katılımcılardan Ö<sub>12</sub> ile araştırmacı arasında geçen diyalog Şekil 6’da sunulmuştur (Satır, 100-104).

[22.40] Ö<sub>12</sub>: Bu ispat değildir hocam.  
 [22.41] A: Neden bunun ispat olmadığını düşünüyorsunuz?  
 [22.42] Ö<sub>12</sub>: Çünkü ben şurada bir kabulden yola çıktım. Aslında teoremlerde de biz bazen şunu yapıyoruz; Öklid’de de bazı postulatları kabul ediyoruz. Onun üzerine gidiyoruz ama herhalde bunu da açıklamam gerekirdi en temelde. Yani ben bu teoremi bilerek başladım.

**Şekil 6.** Ö<sub>12</sub> ile Araştırmacı Arasında Yaşanan Diyalogdan Bir Kesit

Şekil 6’daki diyalog incelendiğinde öğretmenin yapılan her ispat için o ispatta geçen lemmaların da ispatının yapılması gerektiğini düşündüğü anlaşılmaktadır. Bu durum öğretmenin “İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür.” kodunu sergilediği şekilde yorumlanmıştır. Bu kod bireylerin ispat kavramına yönelik görüşlerini ifade eden bir düşünce (yanlış bir düşünce) olup üst bellek aktivitesi gerektirmediğinden bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

İşlem süreci kategorisinde ulaşılan bir diğer bilişsel beceri ise “Örüntü genelleme yapar.” kodudur. Sadece 1. Önermede sergilendiği belirlenen bu beceriyi, sergilediği belirlenen ÖAS<sub>D1</sub>’in aşağıdaki ifadelerinden bu beceriyi sergilediği anlaşılmıştır (Satır, 183-186):

“[28.16] ...Ben bu formülü şöyle yaparım hocam. Yani mantıken ilk önce şunu sorarım: ilk dört terimin toplamı nedir? 16. n’li bir terim kullanarak, formülü 16’ya genelleştirmeye çalışalım. Ezberde tutamıyorum zaten, şimdi ne olabilir? Şimdi n=1 için 1, n=2 için 4, n=3 için 9, n=4 için 16. O zaman  $n^2$  oluyor hocam. Bu yüzden de  $n^2$ ’dir.”

Katılımcının ifadeleri incelendiğinde öğretmen adayı birkaç adım için değer vererek deneme yaptıktan sonra genellemeye ulaşmıştır. Başka bir ifadeyle sonra bilinen anlamda örüntü genelleme yapmıştır. Bu nedenle öğretmen adayının “Örüntü genelleme yapar.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Örüntü genelleme bir ispat ifade etmeyip durumun doğruluğunu garanti etmeyeceğinden bilişsel beceri olarak ele alınmıştır. Čadež ve Kolar (2015) genellenmenin deneyim gerektirmeyen formel yollarla yürütülen tümdengelimsel akıl yürütme olduğunu ifade etmiştir. Bu anlamda örüntü genelleme yapmanın bilişsel beceri olarak belirlenmesinin sözü geçen çalışmayı desteklediği söylenebilir.

İşlem süreci kategorisinde ulaşılan son bilişsel beceri “Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder.” kodudur. Bu becerinin sadece 2. önermede sergilendiği belirlenebilmiştir. ÖA<sub>1D2</sub>’nin aşağıdaki ifadeleri bu beceriyi örnek olarak gösterilebilir (Satır, 64-66):

“[19.14] Mesela bu  $a$  ile  $b$ ’yi aralarında asal diye kabul ediyorum. Bu tek sayı oluyor ( $a$ ’yı gösterir), bu çift sayı oluyor ( $c$ ’yi gösterir). Bu da tek sayı oluyor ( $b$ ’yi gösterir). Bunda olmuyor.  $a$  ile  $c$ ’yi eşit kabul ettim onda oluyor. Bir tane olmayan örnek verdiğimiz için yeterli oluyor.”

Öğretmen adayının ifadeleri ve etkinlik kartı incelendiğinde öğretmen adayının verdiği bir örnek sonucunda yaptığı işlem hatasıyla birlikte önermenin doğru olmadığı sonucuna ulaştığı belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adayının “Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder.” becerisini sergilediği şekilde yorumlanmıştır. Bu beceri çalışmada bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Çünkü çalışmada katılımcılara verilen etkinliklerde yer alan önermeler doğrudur ve doğruluğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılar genellikle önermeyi yanlış anlamışlar veya yanlış işlem yapmışlardır. Başka bir ifadeyle yanlış gerekçelendirme yapmışlardır. Güler ve Ekmekci (2016) de yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının ispat önermesini reddederken zayıf gerekçeler sunduğunu belirlemiştir.

Bilişsel beceriler temasında ulaşılan son kategori ise “Sezgisel kestirme yolları” kategorisidir. Bu kategori altında “Her zaman amaca doğru ilerler.”, “Araç-amaç analizi yapar.”, “Tepe tırmanışı yapar.”, “Rasgele arama yapar.” kodları tespit edilmiştir.

Bu kategoride ulaşılan bilişsel becerilerin ilki “Her zaman amaca doğru ilerler.” kodudur. Sadece 2. önermede sergilendiği belirlenen bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan ÖD1’in sesli düşünme protokolünde kullandığı aşağıdaki ifade ve etkinlik kartında (Bkz. Şekil 7) yaptığı işlemler bu beceriyi sergilediğini göstermektedir (Satır, 61-64):

“[14.08] Şimdi,  $a, k, b, t$ 'ye eşit ve  $a$  ile  $b$  aralarında. Bu nedenle  $a$  ile  $b$ 'nin birbirine eşit olma durumu söz konusu değil. Eee... Bunların çarpımları birbirine eşit olarsa  $k$  ile  $t$ 'de aralarında asal olacak. Aralarında asal olmasından ziyade bunların çarpımları da aynı olduğuna göre, ben burada  $b = k, a = t$  demem gerekir”

Şekil 7. ÖD1'in etkinlik kartından bir kesit

Öğretmenin ifadeleri ve Şekil 7'deki etkinlik kartı incelendiğinde belli adımları kısaltarak (bu adımlar ispat için önemli, göz ardı edilemeyecek adımlardır) sonuca ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. Bu kısaltma öğretmeni yanlış sonuca götürmüştür. Problem çözme sürecinde hedefe ulaşmada gerekli olan adımları göz ardı ederek kısa yoldan bir sonuca ulaşma her zaman amaca doğru ilerleme olarak adlandırılmaktadır. Başka bir ifadeyle, özellikle cebir alanında bazı problemlerin çözümü doğrudan basitleştirme yoluyla sonuca ulaştırılmaz. Önce bir karmaşıklıklaştırma işlemi yapıldıktan sonra basitleştirme işlemine geçilebilir. Bu tür problemlerde hedef görüldüğünde doğrudan sonuca gidilirse sonuca genellikle ulaşamayacaktır (Arcavi, Drijvers ve Stacey, 2017). Bu nedenle öğretmenin “Her zaman amaca doğru ilerler.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategoride ulaşılan bir diğer bilişsel beceri “Araç-amaç analizi yapar.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların ifadelerinden örnekler Tablo 7'de sunulmuştur.

**Tablo 7.** “Araç-amaç analizi yapar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının İfadeleri

Katılımcı	Önerme	Görüşü
ÖD1	1	“[09.45] Bir daha yapıyorum hocam. $(4n^2 + 2n) : 2 - n$ ne yapar? $4n^2 - 2n^2 + 2n - 2n$ ... Şunların ikisi gitti. $(2n^2 : 2)$ , $n^2$ 'yi buldum hocam. 1'den n'e kadar olanları aldım. Onlardan tek sayıların toplamını bulmak istiyordum ya 1'den $2n$ 'e kadar olanları çıkardım. Sonuçta $n^2$ buldum. İspat tamamlamış oldu.” (Satır, 43-46)
ÖASo1	2	“[34.22] ... Bunu da $x.(x+1)$ diye parçaladığımda $x$ 'ler zaten birbirini bölüyor. Sadece $(x+1)$ k'yı böler mi oldu. $(x+1)$ de b'ydi. Şimdi b böler k mı oldu? Aslında k, b'nin bir katı olmak zorunda yani buradan onu anlıyorum.” (Satır, 91-93)

Tablo 7 incelendiğinde katılımcıların süreç içerisinde analiz ederek işlemi yapmaya çalıştıkları anlaşılmaktadır. Ancak katılımcıların yaptıkları işlemler onların sonuçlarının doğruluğunu garanti etmeyecek işlemlerdir. Hedefin alt hedeflere bölünerek incelendiği, belli algoritmaların kullanıldığı ancak bu algoritmaların sonuca ulaşmayı garanti etmediği yaklaşımlar araç-amaç analizi yapma olarak adlandırılmaktadır. Bu nedenle elde edilen bulgu katılımcının “Araç-amaç analizi yapar.” becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

Bu kategoride ulaşılan bir başka bilişsel beceri “Tepe tırmanışı yapar.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarında ifadeler örnek olarak Tablo 8’de sunulmuştur.

**Tablo 8.** “Tepe tırmanışı yapar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının İfadeleri

Katılımcı	Önerme	Görüşü
ÖD <sub>1</sub>	1	“[11.27] Yok bence değildir. Yani ben ilk aklıma gelen bu olduğu için bunu yaptım.” (Satır, 41)
ÖAS <sub>01</sub>	2	“[27.18] ...Şimdi kontrol edeceğiz şunun sonucunun tamsayı olup olmadığını. Şuraya bir soru işareti koyalım. $c/[(c/k). (c/t)]$ şeklinde ifade ettik. Buradan $(k.t)/c$ olur. $c$ yerine $a.k$ yazarsak; $k$ gider. $t/a$ kalır...” (Satır, 127-128)

Tablo 8 incelendiğinde katılımcıların doğru çözüm yoluna yaklaştıkları ancak yaptıkları sadeleştirmelerle (kısa yollar kullanılmaktadır) doğru sonuca ulaşamadıkları anlaşılmaktadır. Doğru çözüm yoluna en yakın yanlış çözüm tepe tırmanışı olarak adlandırılmaktadır. Bu nedenle katılımcıların “Tepe tırmanışı yapar.” (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 417) becerisini sergiledikleri anlaşılmıştır.

Sezgisel akıl yürütme kategorisinde ulaşılan son bilişsel beceri ise “Rasgele arama yapar.” kodudur. Her iki önermede de sergilendiği tespit edilen bu becerinin 1. Önermede sergilendiği gözlemlerde belirlenmiştir. 2. Önermede bu beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>12</sub>’nin sesli düşünme protokolünde kullandığı “[34.00]  $a$ ’yı  $b$  türünden yazamaz mıyım?  $k$  yerine bu sefer, biraz daha değiştireceğim hocam bakalım nasıl olacak?  $t$  yerine  $a.c$  yazdık...” (Satır, 142-143)” ifadelerinden bu beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır. Öğretmenin ifadeleri incelendiğinde öğretmen bir strateji dâhilinde değil, rasgele denemelerle çözüm yoluna ulaşmaya çalışmaktadır. Benzer bir duruma ÖAS<sub>D2</sub>’nin etkinlik kartında da rastlanmıştır. Öğretmen adayının etkinlik kartından görüntü Şekil 8’de sunulmuştur.

**Şekil 8.** ÖAS<sub>D2</sub>’in Etkinlik Kartından Bir Kesit

Şekil 8 incelendiğinde katılımcının “Rasgele arama yapar.” bilişsel becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu becerilerin sergilendiği belirlenen katılımcıların en kısa yoldan sonuca ulaşmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Bu beceriler katılımcıların hedefi gördüklerinde kısa yoldan hedefe gitmelerini sağladığından arada yapılması gereken işlemlerin göz ardı edilmesine ve yanlış yapılmasına sebebiyet verebilir (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 417). Bu bağlamda her zaman amaca doğru ilerler becerisinin bilişsel beceri olarak tespit edilmesinin sözü geçen araştırmacıların görüşünü desteklediği söylenebilir.

Bilişsel beceriler temasında ulaşılan kodların önermelere ve katılımcılara göre dağılımı Tablo 9’da sunulmuştur.

**Tablo 9.** Bilişsel Beceriler Temasında Sergilenen Becerilerin Sorulara ve Katılımcılara Göre Dağılımı

Kategori	Kod	Sorular		Beceriye Sergileyen Öğretmenler		Beceriye Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriye Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	No	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
İspat Önermesini Okuma	Önermeyi sembolik olarak yazar	2	1.S	4	Ö <sub>D2</sub> - Ö <sub>O1</sub> - Ö <sub>O2</sub> - Ö <sub>I2</sub>	3	Ö <sub>ASD2</sub> - Ö <sub>ASO2</sub> - Ö <sub>ASI2</sub>	6	Ö <sub>A1D1</sub> - Ö <sub>A1D2</sub> -Ö <sub>A1O1</sub> - Ö <sub>A1O2</sub> - Ö <sub>A1I1</sub> - Ö <sub>A1I2</sub>
			2.S	4	Ö <sub>O1</sub> - Ö <sub>O2</sub> - Ö <sub>I1</sub> - Ö <sub>I2</sub>	2	Ö <sub>ASD2</sub> - Ö <sub>ASI1</sub>	-	-
	İspat önermesini ilk kez okur	2	1.S	5	Ö <sub>D1</sub> - Ö <sub>D2</sub> - Ö <sub>O1</sub> - Ö <sub>I1</sub> - Ö <sub>I2</sub>	3	Ö <sub>ASO2</sub> - Ö <sub>ASI1</sub> - Ö <sub>ASI2</sub>	6	Ö <sub>A1D1</sub> - Ö <sub>A1D2</sub> -Ö <sub>A1O1</sub> - Ö <sub>A1O2</sub> - Ö <sub>A1I1</sub> - Ö <sub>A1I2</sub>
			2.S	4	Ö <sub>D1</sub> - Ö <sub>D2</sub> - Ö <sub>O1</sub> - Ö <sub>I1</sub>	2	Ö <sub>ASO2</sub> - Ö <sub>ASI1</sub>	-	-
	Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür	1	1.S	1	Ö <sub>O2</sub>	-	-	-	-
	Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder	1	1.S	-	-	1	Ö <sub>ASD2</sub>	-	-
	Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder	1	1.S	-	-	1	Ö <sub>ASD2</sub>	-	-
	İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler	2	1.S	1	Ö <sub>O2</sub>	2	Ö <sub>ASD1</sub> -Ö <sub>ASO1</sub>	-	-
			2.S	1	Ö <sub>O2</sub>	2	Ö <sub>ASD1</sub> -Ö <sub>ASO1</sub>	-	-
	Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür	2	1.S	1	Ö <sub>O1</sub>	2	Ö <sub>ASO1</sub> - Ö <sub>ASI1</sub>	-	-
		2.S	1	Ö <sub>O1</sub>	2	Ö <sub>ASO1</sub> - Ö <sub>ASI1</sub>	1	Ö <sub>A1D2</sub>	
İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını belirler	2	1.S	-	-	2	Ö <sub>ASD2</sub> - Ö <sub>ASI1</sub>	-	-	
		2.S	3	Ö <sub>D2</sub> - Ö <sub>O2</sub> - Ö <sub>I2</sub>	3	Ö <sub>ASD1</sub> - Ö <sub>ASI1</sub> - Ö <sub>ASI2</sub>	-	-	
İspatın anahtar kavramlarını belirler	1	2.S	3	Ö <sub>D2</sub> - Ö <sub>O1</sub> - Ö <sub>O2</sub>	1	Ö <sub>ASI2</sub>	-	-	
İspatın hipotez-hükümünü anlamak için önermenin altını çizer	2	1.S	1	Ö <sub>I1</sub>	-	-	-	-	
		2.S	1	Ö <sub>O2</sub>	-	-	-	-	
Doğruluğunu Değerlendirme	Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir	2	1.S	-	-	-	-	1	Ö <sub>A1O2</sub>
			2.S	1	Ö <sub>D2</sub>	2	Ö <sub>ASD1</sub> - Ö <sub>ASD2</sub>	-	-
	Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir	2	1.S	1	Ö <sub>O2</sub>	2	Ö <sub>ASO1</sub> -Ö <sub>ASI2</sub>	-	-
			2.S	4	Ö <sub>D1</sub> - Ö <sub>O2</sub> - Ö <sub>O2</sub> - Ö <sub>I2</sub>	-	-	2	Ö <sub>A1O2</sub> - Ö <sub>A1I1</sub>
	Otoriter ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir	1	1.S	3	Ö <sub>D1</sub> - Ö <sub>O2</sub> - Ö <sub>I2</sub>	-	-	1	Ö <sub>A1I2</sub>
	Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir	1	1.S	-	-	-	-	2	Ö <sub>A1D1</sub> - Ö <sub>A1O2</sub>
	İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu otoriteye sorar	2	1.S	1	Ö <sub>I2</sub>	2	Ö <sub>ASO1</sub> - Ö <sub>ASI1</sub>	-	-
			2.S	1	Ö <sub>I2</sub>	3	Ö <sub>ASD1</sub> -Ö <sub>ASI1</sub> - Ö <sub>ASI2</sub>	-	-
İşlemlerini kontrol ederek doğruluğu değerlendirir	1	1.S	1	Ö <sub>D1</sub>	-	-	-	-	
İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir	1	1.S	-	-	1	Ö <sub>ASI2</sub>	-	-	

Tablo 9. Devamı

Kategori	Kod	Sorular		Beceriye Sergileyen Öğretmenler		Beceriye Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriye Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	No	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Strateji belirleme	Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder	2	1.S - - 2.S 1 Ö <sub>D2</sub>	-	-	-	-	1	ÖA <sub>1O1</sub>
	Ezberlediği yolla ispat yapar	2	1.S 2 Ö <sub>D1</sub> - Ö <sub>D2</sub> 2.S - -	2	Ö <sub>D1</sub> - Ö <sub>D2</sub>	2	ÖAS <sub>i1</sub> - ÖAS <sub>i2</sub>	1	ÖA <sub>1i2</sub>
	İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir	1	2.S - -	-	-	1	ÖAS <sub>O1</sub>	-	-
İşlem Süreci	İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür	1	1.S 1 Ö <sub>i2</sub>	1	Ö <sub>i2</sub>	-	-	-	-
	Örüntüleri genelleme yapar	1	1.S - -	-	-	3	ÖAS <sub>D1</sub> - ÖAS <sub>D2</sub> -ÖAS <sub>O2</sub>	-	-
	Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder	1	2.S - -	-	-	-	-	2	ÖA <sub>1D2</sub> - ÖA <sub>1i1</sub>
Sezgisel kestirme yolları	Her zaman amaca doğru ilerler	1	2.S 2 Ö <sub>D2</sub> -Ö <sub>O2</sub>	2	Ö <sub>D2</sub> -Ö <sub>O2</sub>	1	ÖAS <sub>i1</sub>	-	-
	Araç-amaç analizi yapar	2	1.S 1 Ö <sub>D1</sub> 2.S - -	1	Ö <sub>D1</sub>	1	ÖAS <sub>O1</sub>	-	-
	Tepe tırmanışı yapar	2	1.S - - 2.S 1 Ö <sub>i2</sub>	-	-	-	-	1	ÖA <sub>1i2</sub>
	Rasgele arama yapar	2	1.S 1 Ö <sub>D1</sub> 2.S 1 Ö <sub>i2</sub>	1	Ö <sub>D1</sub>	-	-	-	-
		2	1.S 1 Ö <sub>D1</sub> 2.S 1 Ö <sub>i2</sub>	1	Ö <sub>D1</sub>	2	ÖAS <sub>D2</sub> - ÖAS <sub>O1</sub>	-	-



Tablo 9 incelendiğinde bilişsel beceriler temasında en sık sergilendiği belirlenen becerinin “İspat önermesini ilk kez okur.” kodu olduğu belirlenmiştir. En az sergilendiği belirlenen becerilerin ise “Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür.”, “Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder.”, “Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder.”, “İşlemlerini kontrol ederek doğruluğu değerlendirir.”, “İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir.” ve “İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür.” becerileri olduğu tespit edilmiştir. Kategoriler bağlamında değerlendirildiğinde en sık sergilendiği belirlenen kategori “İspat önermesini okuma” kategorisi iken en az sergilenen kategori “İşlem süreci” kategorisidir. Öğretmenlerin en fazla sergilediği beceri “İspat önermesini ilk kez okur.” Öğretmen adaylarının ise en fazla sergilediği beceriler “İspat önermesini ilk kez okur.” ve “Önermeyi sembolik olarak yazar” kodlarıdır. Bilişsel beceriler temasında sayıca en fazla beceriyi öğretmenler sergilerken, en az beceriyi ise 1. Sınıf öğretmen adayları sergilemiştir.

### Üst Bilişsel Beceriler Temasında Elde Edilen Bulgular ve Tartışma

Üst bilişsel beceriler temasında “İşlemleri kolaylaştırma”, “Sorgulama”, “Farkındalık”, “Planlama”, Strateji belirleme”, “Kontrol etme”, “İlişkilendirme” ve “Analojik akıl yürütme” olarak sekiz kategori oluşmuştur.

Üst bilişsel beceriler temasındaki kategorilerin ilki “İşlemleri kolaylaştırma” kategorisidir. Bu kategoride “Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar.”, “İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır.” ve “İspatın anahtar kavramlarını belirler.” kodlarına ulaşılmıştır. Burada

İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde ulaşılan üst bilişsel becerilerin ilki “Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>1</sub>’in ifadeleri şöyledir (Satır, 124-136):

“[18.49] Burada  $n$ ’yi kolay ifade edebilmek için  $k$ ’yi kendimiz tanımladık. Şöyle bir şey var: Burada  $n$ ’ye kadar diyor ama soruda bana sorduğunda bir tek sayı verecek. Biz burada tek sayıyı daha kolay ifade edebilmek için  $k$  kullandık. Ben bunu  $n$ ’ye de çevirsem yine terim sayısı  $(k + 1)$  çıkacak. Sonuçta bir şey değişmeyecek. Burada  $(2n + 1)$ ’e kadar demediği için verdiği ifadede  $n$ ’yi de tek sayı olarak söylemiş. Ama orayı tek sayı formatında verse daha rahat ifade ederdik. Bende yeni bir şey tanımlamazdım. Burada şimdi  $n$  yazacağım buraya bakan belki unutacak tek sayı olduğunu.  $(2k + 1)$  veya  $(2k - 1)$  yazınca tek sayı formatına daha açık ve net gözüküyor.  $n$ ’ye de çevrilebilir.  $k$ ’yi çekip yerine koyarsak, fark eden bir şey olmaz. Yani  $k$ ’yi çektik mesela,  $(n-1):2$  şimdi bakayım ne geliyor? Şimdi  $k$  yerine  $(n - 1): 2$  yazdık.  $(n - 1): 2 + 1$ . O da ne geldi  $(n + 1): 2$ ’nin karesi geldi. O da az önce söylemiş olduğum hesaba geldi. Yani  $(son\ terim + ilk\ terim): 2$  geldi. Yani ortalamanın karesi geliyor. Aritmetik olduğu için sonuçta baştan birinci terim ile sonuncu terim, ikinci terimle sondan bir önceki terim, hepsinin ortalamasını alsak zaten sonuçta aynı hesaba çıkacak.  $n$ ’ye de bağlasak aynı şey gelecek.”

Öğretmenin ifadeleri incelendiğinde değişken değiştirme yoluyla ispatı kolaylaştırmaya çalıştığı anlaşılmaktadır. Bu durum öğretmenin “Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar.” becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde ulaşılan diğer üst bilişsel beceri “İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen ÖAS<sub>D1</sub> ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir:

ÖAS<sub>D1</sub>: “[31.39]  $a$ ’ya hatta  $2k$  diyelim. Eğer  $c$ ,  $a$ ’yı bölüyorsa  $c$ ,  $4k$ ’dir. Şimdi  $c$ ,  $b$ ’yi de bölüyorsa o zaman  $c$ ,  $4k$  ise  $b$  de  $4k$ ’dir. (Satır, 203-204)”

A: “[32.47] Neden  $2k$ ,  $4k$  şeklinde ifadeler kullandınız? (Satır, 209)”

ÖAS<sub>D1</sub>: “[32.49] ...2 diyemem.  $k$  mesela 5 olursa olmaz. Yani ortaklarda birleştirmem lazım böler sorularımı... (Satır, 210-211)”

Diyalog incelendiğinde öğretmen adayının “İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde ulaşılan son üst bilişsel beceri “İspatın anahtar kavramlarını belirleyerek ispatı kolaylaştırmayı amaçlar.” kodudur. Yalnızca ikinci önermede sergilediği belirlenen bu beceriyi sergilediği belirlenen ÖASı’nın “[19.19] ...*asalsa bunların EKOK’ları 1 oluyor. Yok, EBOB’ları evet EBOB’ları 1 oluyor.* (Satır, 97-98)” ifadelerinden EBOB’larının 1 olmasını anahtar kavram olarak belirlediği anlaşılmaktadır. Bu durum “İspatın anahtar kavramlarını belirleyerek ispatı kolaylaştırmayı amaçlar.” kodunu sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde “Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar.”, “İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır.” ve “İspatın anahtar kavramlarını belirler.” kodlarına ulaşılmıştır. Bu beceriler kişinin sahip olduğu bilgiyi kullanarak işlemleri kolaylaştırmasını sağlamaktadır. Bu becerilerin bilişsel, üst bilişsel ayrımının yapılmasında katılımcıların düşünceleri ön plana alınmıştır. Çünkü bu beceriler bilişsel olarak ele alınabileceği gibi üst bilişsel olarak da ele alınabilir. Bu bölümde sunulan kodlarda katılımcı görüşleri üst bilişsel beceriye işaret ettiği için bu kategori üst bilişsel teması altında değerlendirilmiştir. Bu kategoride tespit edilen beceriler kişinin sahip olduğu bilginin farkında olmasını, buna yönelik öz-düzenleme yapmasını gerektirmektedir. Bu nedenle beceriler öz-düzenleme bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Bruning ve diğerleri (2014) bireyin kendi becerisinin farkında olup bu becerileri düzenlemesini üst bilişsel öz-düzenleme olarak açıklamaktadır. Yüksel (2004) bireyin hedefine ulaşmak için kendi becerilerini düzenlemesini öz-düzenleme olarak ifade etmiştir. Bu nedenle işlemleri kolaylaştırma amacıyla sergilenen becerilerin üst bilişsel olması alan yazını desteklemektedir.

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir diğer kategori “Sorgulama” kategorisidir. Bu kategoride “Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür.”, “Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar.”, “Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar.”, “İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar.” ve “İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar.” kodlarına ulaşılmıştır.

Sorgulama kategorisinde ulaşılan üst bilişsel becerilerin ilki “Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının ifadeleri Tablo 10’da örnek olarak sunulmuştur.

**Tablo 10.** “Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının İfadeleri

Katılımcı Önerme Görüşü		
ÖASo <sub>2</sub>	1	“[05.59] ... $n = 1$ için 1, sağlıyor. $n = 2$ için toplamı 4 oluyor, $n = (n + 1)$ için doğru olduğunu kabul edip $n = (n + 2)$ için doğru olduğunu gösterebilir miyiz?” (Satır, 44-45)
Öo <sub>2</sub>	2	“[29.28] ...Her iki tarafın karekökünü almayı düşündüm ama yapmayacağım. Taraf tarafa çarpma yapacağım. Buradan ben şunu söyleyebilir miyim? $a, b$ ’nin $c$ ’yi bölmektedir. Evet söyleyebilirim...” (Satır, 176-177)

Tablo 10 incelendiğinde katılımcıların kendilerine sorular sorarak işlem adımlarını sürdürdükleri anlaşılmaktadır. Başka bir ifadeyle katılımcıların “Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Sorgulama kategorisinde ulaşılan ikinci üst bilişsel beceri “Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının ifadelerinden örnekler Tablo 11’de sunulmuştur.

**Tablo 11.** “Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının İfadeleri

Katılımcı	Önerme	Görüşü
Ö <sub>11</sub>	1	“[18.16] Terim sayısının karesi ya da şöyle yapabilirim: Dizi aritmetik bir dizi olduğu için şöyle yapabilirim...” (Satır, 118-119)
Ö <sub>02</sub>	2	“[29.28] ...a ve b'nin EBOB'u 1'dir. Bu ne demek? Bunların en büyük ortak bölüneni 1'dir demektir...” (Satır, 141-142)

Tablo 11 incelendiğinde katılımcıların yaptıkları işlemleri nedenleriyle ifade ettiği görülmektedir. Başka bir ifadeyle katılımcılar hangi işlemi neden yaptıklarını açıklamaktadırlar. Bu durum katılımcıların “Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar.” becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

Sorgulama kategorisinde ulaşılan bir diğer üst bilişsel beceri “Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar.” kodudur. Bu becerinin sadece 1. önermede sergilendiği belirlenebilmiştir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>02</sub>'nin “[20.16] ...Ben şunu göstereceğim: Acaba  $n=k+1$  tane tek sayının toplamı da  $(k+1)^2$  midir?  $(k+1)$  tane tek sayının toplamı da  $(k+1)^2$  midir?” (Satır, 116-117) ifadeleri bu beceriyi sergilediğini göstermektedir.

Sorgulama kategorisinde ulaşılan başka bir üst bilişsel beceri “İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar.” kodudur. Sadece 1. önermede sergilendiği belirlenen beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>01</sub>'in “[08.11] ... $2n^2, 2n, 4n^2$ ... Şurada bir yerde yanlışlık mı yaptım ben acaba?” (Satır, 41-42) ifadelerinden “İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Sorgulama kategorisinde ulaşılan son üst bilişsel beceri ise “İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar.” kodudur. Sadece 2. önermede sergilendiği belirlenen bu beceriyi sergileyen katılımcılardan Ö<sub>11</sub>'in “[18.16] ...mesela ne dedik 1'den 55'e kadar mı? 1 ile  $k+1$  arasında bir şeydir. (Satır, 119)” ifadelerinden ilgili beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategoride “Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür.”, “Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar.”, “Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar.”, “İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar.” ve “İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar.” kodlarına ulaşılmıştır. Sorgulamaya dayalı olan bu beceriler üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazında bu beceriler genellikle üst bilişsel izleme adı altında sunulmaktadır. Sorgulamaya yönelik sergilenen izleme becerilerinin üst bilişsel beceriler olduklarını ifade eden pek çok çalışma mevcuttur (Aydın ve Ubuz, 2010; Jiang, Ma ve Gao, 2016; Schraw ve Dennison, 1994). Bu becerilerin üst bilişsel olarak yorumlanması alan yazını desteklemektedir.

Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bir diğer kategori ise “Farkındalık” kategorisidir. Bu kategori sadece 2. önermede belirlenebilmiştir. Bu kategoride “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.”, “Yansıtıcı düşünme becerisi sergiler.” ve “Önermede yer alan tüm ifadelerin ispatta kullanılacağını farkındadır.” becerilerine ulaşılmıştır.

Farkındalık kategorisinde ulaşılan üst bilişsel becerilerin ilki “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>AS01</sub> “[32.41] Hocam çiftlerin toplamını hatırlayamadım, hatırlayabilsem söylediğim yöntemden sonucun çıkacağını biliyorum. (Satır, 81-82)” ifadelerini kullanmıştır. Öğretmen adayının ifadeleri incelendiğinde ispat yönteminin farkında olduğu ve o yöntemin kendisini doğru sonuca ulaştıracağını bildiği anlaşılmaktadır. Bu nedenle öğretmen adayının “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Farkındalık kategorisinde ulaşılan bir diğer üst bilişsel beceri ise “Yansıtıcı düşünme becerisi sergiler.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>AS11</sub> “[25.05] Yani matematiksel sembollerin kullanıldığı bir ispat şuan biraz uydurma gibi oluyor. Aralarında asal hiç kullanmamış oluyorum. Vermişlerse kullanmak lazım. Aralarında asal a ve b. (Satır, 118-119)” ifadelerini kullanmıştır. Bu ifadeler kişinin

kendini değerlendirdiği göstermektedir. Alan yazında kişinin kendini değerlendirmesi yansıtıcı düşünme olarak adlandırıldığından, bu ifadeler öğretmen adayının “Yansıtıcı düşünme becerisi sergiler” kodunu sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

Farkındalık kategorisinde sergilendiği belirlenen bir başka üst bilişsel beceri “Önermede yer alan tüm verilerin ispatta kullanılacağına farkındadır.” kodudur. Bu beceriyi sergileyen katılımcılardan birisi ÖAS<sub>12</sub>'dir. Bu öğretmen adayının “[30.27] *Normalde gidiyorum ama şeyi kullanmıyorum aralarında asal olmasını kullanmıyorum hiç oradan büyük ihtimalle çıkacak. a.m = c, b.n = c, a ile b aralarında asaldır.* (Satır, 100-101)” ifadeleri bu beceriye örnek olarak sunulabilir.

Bu kategori sadece ikinci önermede elde edilmiştir. Bu kategoride “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.”, “Yansıtıcı düşünme becerisi sergiler.” ve “Önermede yer alan tüm ifadelerin ispatta kullanılacağına farkındadır.” becerilerine ulaşılmıştır. Bu beceriler durumsal bilgi bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazın incelendiğinde bir stratejiyi nasıl ve ne zaman kullanılacağına farkında olmanın üst bilişsel beceri olduğunu belirten çalışmalar mevcuttur (Mokhtari ve Reichard, 2002; Schraw ve Dennison, 1994; Yang, 2012). Bu bağlamda farkındalık kategorisinde elde edilen üst bilişsel becerilerin alan yazını desteklediği söylenebilir.

Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bir diğer kategori “Planlama” kategorisidir. Bu kategoride “Sonuca yönelik tahminde bulunur.”, “İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir.”, “Soru sorarak hedefini belirler.” ve “İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker.” kodlarına ulaşılmıştır.

Bu kategoride elde edilen ilk üst bilişsel beceri “Sonuca yönelik tahminde bulunur.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen ÖAS<sub>02</sub>'nin daha önce bildiği formülü yazarak bu formülü hedef olarak belirlediği, daha sonra bu ifadeyi doğrulamaya çalıştığı görülmüştür. Katılımcının “Sonuca yönelik tahminde bulunur.” becerisini sergilediği etkinlik kartı görüntüsü Şekil 9'da sunulmuştur.

$$1 + 3 + 5 + \dots + n = n^2$$

$$n^2 = n^2$$

Şekil 9. ÖAS<sub>02</sub>'in Etkinlik Kartından Bir Kesit

Planlama kategorisinde ulaşılan bir başka üst bilişsel beceri “İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir.” becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>01</sub>'in “[24.16] *Nasıl ispat etmem gerektiğini düşünüyorum. İspat için başlangıç noktası bulmaya ve neyi ispatlayacağıma belirlemeye çalışıyorum. Şimdi söylediğim şeyin matematiksel ispatını yapmam gerekiyor. Matematikte aldığımız verdiğimiz her şeyin bir ispatı olması lazım...* (Satır, 111-113)” ifadelerinden ispata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Planlama kategorisinde bulunan bir başka üst bilişsel beceri “Soru sorarak hedefini belirler.” kodudur. Bu beceriye örnek olarak Ö<sub>12</sub>'nin “[24.45] *Şimdi biz neyi ispatlayacağız? c/(a.b)'nin de bir tamsayı olduğu ispatlayacağız.* (Satır, 118-119)” ifadeleri verilebilir. Öğretmenin ifadeleri incelendiğinde ilk önce hedefi belirlemeye yönelik soru sorduğu ardından soruya yine kendisinin cevap verdiği anlaşılmaktadır. Bu nedenle öğretmenin “Soru sorarak hedefini belirler.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategorideki son üst bilişsel beceri “İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen Ö<sub>02</sub> “[29.00] *Şimdi şöyle. Zihnimde tasarlayıp doğruluğunu gördüğüm bir ifadeyi kâğıda döküp doğruluğunu görürsem devamını getiriyorum. Eğer işlemleri yaparken, zihnimde tasarladığımı kâğıda dökerken bir yerde bir hata görürsem bu sefer o zihnimdeki ifadeleri bırakıp olaya farklı yönden bakmaya çalışıyorum.* (Satır, 165-168)” ifadelerini kullanmıştır. Katılımcının ifadeleri incelendiğinde bu beceriye örnek oluşturduğu anlaşılmaktadır.

Bu kategori altında “Sonuca yönelik tahminde bulunur.”, “İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir.”, “Soru sorarak hedefini belirler.” ve “İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker.” becerilerine ulaşılmıştır. Alan yazında planlamaya yönelik sergilenen becerilerin üst bilişsel olduğunu belirten pek çok çalışma mevcuttur (Cozza ve Oreshkina, 2013; Lesseig, 2016; Zazkis vd., 2016). Bu nedenle planlama kategorisinde elde edilen becerilerin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazını desteklediği söylenebilir.

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir başka kategori “Strateji belirleme” kategorisidir. Bu kategoride “İraksak düşünme yeteneğini kullanır.” ve “Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır.” kodlarına ulaşılmıştır. Bu kodlar alan yazında yaratıcı düşünmenin aşamaları olarak belirtilmiştir. Bu becerilere örnek olarak Ö<sub>01</sub>’in “[18.26] Birkaç ispat yöntemini düşünüp bunlardan birini seçeceğim... (Satır, 93)” cümleleri verilebilir. Katılımcının ifadeleri incelendiğinde ilk olarak çözüm yollarını çeşitlendirdiği yani iraksak düşünme sergilediği, ardından bu çözüm yollarından kendine en uygun olanı seçerek yakınsak düşünme sergilediği anlaşılmaktadır. Bu durum katılımcının “İraksak düşünme yeteneğini kullanır.” ve “Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır.” becerilerini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

Yaratıcı düşünme sürecinin aşamaları olarak tanımlanan bu iki beceri üst düzey düşünme becerisi gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Goldstein (2013) yaratıcı düşünmenin daha çok iraksak düşünmeyle bağdaştırıldığını, iraksak düşünmenin de doğru düşünmeye yakınsamayı sağladığını belirtmiştir. Plotnik (2009) ve Woolfolk-Hoy (2015) yakınsak ve iraksak düşünmenin analiz, sentez ve değerlendirme gerektirdiğini belirtmiştir. Schraw ve Dennison (1994) birkaç çözüm yolunun düşünülerek en uygun olanın seçilmesini üst bilişsel beceri olarak açıklamıştır. Bu bağlamda yaratıcı düşünmenin aşamaları olarak tespit edilen “İraksak düşünme yeteneğini kullanır.” ve “Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır.” becerilerinin üst bilişsel olması alan yazınla örtüşmektedir.

Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen diğer bir kategori “Kontrol etme” kategorisidir. Bu kategoride “Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.”, “Hedeflediği sonuca ulaşp ulaşamadığını kontrol eder.”, “Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar.” ve “Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder.” kodlarına ulaşılmıştır.

Kontrol etme kategorisinde ulaşılan üst bilişsel becerilerin ilki “Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” kodudur. “Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir.” becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının ifadelerinden örnekler Tablo 12’de sunulmuştur.

**Tablo 12.** “Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının İfadeleri

Katılımcı	Önerme	Görüşü
Ö <sub>02</sub>	1	“[23.26] Evet, ispatım doğrudur. Öncelikle formülü basit yöntemlerle görmeye çalıştım. Daha sonra oluşan formülü de tümevarım yöntemiyle göstermeye çalıştım. Tümevarım ispat yöntemi bana doğruyu gösteriyor.” (Satır, 128-129)
Ö <sub>01</sub>	2	“[24.44] Yani tamsayılarda ispat geçerli olur. Sonuçta a ile b aralarında asal olduğu için bağımsız birbirinden. Ortak bölenleri yok. Bir sayının içinde nasıl diyeyim çarpan olarak ayrı ayrı geçiyorlarsa ortak geçtiklerine bölünürler. Ayrı ayrı geçtiklerinde bölünüyorlarsa c’nin içinde ikisini de barındırdığını gösteriyor.” (Satır, 157-160)

Tablo 12 katılımcıların yaptıkları ispatı açıklarken mantıksal çerçeve dâhilinde sistematik olarak aktardıklarını göstermektedir. Bu şekilde yapılan gerekçelendirme Aksiyomatik ispat şeması olarak isimlendirildiği için katılımcıların sergilediği beceri “Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir.” becerisi olarak adlandırılmıştır. Bireylerin ispatı sembolik ifade etmesi ve



yeterli gerekçelendirme yapmasına dayalı olan bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Dede ve Karakuş (2014) bu ispat şemasının tümdengelimsel akıl yürütme gerektiren beceri olduğunu ifade etmişlerdir. Bu şemaya göre gerekçelendirme yapan bireyler yeni karşılaştıkları önerme ve ispatları da anlayıp, algılayabilirler. Bu nedenle diğer tüm ispat şemalarıyla karşılaştırıldığında en üstte yer alan ispat şeması olarak tanımlanabilir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016). Bu bağlamda bu becerinin üst bilişsel olmasının alan yazını desteklediği söylenebilir.

Kontrol etme kategorisinde ulaşılan bir diğer üst bilişsel beceri "Hedeflediği sonuca ulaşım ulaşılamadığını kontrol eder." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen ÖASın'ın "[14.28] *Şunların biri giderse  $(n - 1)^2$  olup,  $(n - 1)^2$ : 4'den son olarak  $(n - 1)$ : 2<sup>2</sup> bulunmalı. Sanırım buna ulaşmam gerekli* (Satır, 81-82)" sözlerinden hedefini belirlediği anlaşılmaktadır. Sesli düşünme protokolünün ilerleyen sürecinde katılımcının kullandığı "[17.25] *...Onların bir fazlasını aldım. Şurada yanlış yaptım. Sonu +1 olacaktır. Tamam, şuan doğru çıkıyor galiba.* (Satır, 89-90)" ifadelerinden ise sonuca ulaşım ulaşılamadığını kontrol ettiği görülmektedir. Bu iki beceriyi bir arada sergilediği belirlenen katılımcının "Hedeflediği sonuca ulaşım ulaşılamadığını kontrol eder." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bireyin koyduğu hedefe ulaşım ulaşılamadığını kontrol etmesine dayalı olan bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazında bazı kaynaklar kontrol etmenin üst bilişsel izleme sürecinin bir aşaması olduğunu ifade etmiştir. Schraw ve Dennison (1994) da hedeflediği sonuca ulaşım ulaşılamadığını kontrol etmenin veya sorgulamanın üst bilişsel beceri olduğunu belirlemiştir.

Kontrol etme kategorisinde sergilendiği belirlenen bir başka üst bilişsel beceri "Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen Öz'nin "[33.55] *Şu an sonuca gitmeye çalışıyorum. Bir yeri göremiyorum, bunun farkındayım. Tekrar soruya dönüyorum.* (Satır, 187-188)" ifadeleri bu koda örnek verilebilir. Öğretmenin ifadesi incelendiğinde, sonuca ulaşamadığının farkına vardığı, ardından tekrar soruya döndüğü anlaşılmaktadır. Bu durum katılımcının "Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar" becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır. Nool'da (2012) matematik öğretmen adaylarının rutin olmayan problem çözme sürecinde problemi çözüme ulaştıramadıklarında en başa dönerek tekrar çözüm yaptıklarını belirlemiştir. Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar becerisi, çözüm sürecinin izlenmesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır.

Kontrol etme kategorisinde ulaşılan üst bilişsel becerilerin sonuncusu "Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder." kodudur. Bu beceriye örnek olarak, beceriyi sergilediği belirlenen Öz'nin "[31.56] *İlk başta bu yolda bir hata yaptım mı, yapmadım mı onu kontrol etmeye çalışıyorum. Eğer hata varsa başka bir strateji denerim.* (Satır, 132-133)" ifadeleri verilebilir. İfadeler incelendiğinde katılımcının hata yaptığını düşündüğünde ispat stratejisine odaklanıp stratejiyi değiştirdiği anlaşılmaktadır. Bu durum katılımcının "Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder." becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır. Bu beceri kişinin ispat sürecini kontrol etmesini ve izlemesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Fang ve Cox (1999) da ispat stratejisinin belirlendikten sonra kontrol edilmesinin üst bilişsel beceri olduğunu belirlemiştir.

Üst bilişsel beceriler temasına elde edilen bir başka kategori "İlişkilendirme" kategorisidir. İlişkilendirme kategorisinde "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." ve "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." kodlarına ulaşılmıştır.

İlişkilendirme kategorisinde sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerin ilki "İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar." kodudur. "İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının ifadelerinden örnekler Tablo 13'de sunulmuştur.

**Tablo 13.** “İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının İfadeleri

Katılımcı	Önerme	Görüşü
Ö <sub>11</sub>	1	“[14.47] ...Eşitliğin diğer tarafı da 2a yaptı. Şimdi 2k + 2 sayısı terim sayısı ile alakalı. Terim sayısına geçmem gerekiyor...” (Satır, 105-106)
ÖAS <sub>12</sub>	2	“[28.42] Yazdığım ifade ispat için pek bir şey ifade etmiyor gibi görünüyor. Bu ifade ispata yardımcı olma gibi. Benim bulmak istediğim şey c'nin m'ye tam olarak bölündüğü mü? Yukarıdaki ifadede c'nin m'ye tam olarak bölündüğünü bulmak istiyorum. Onu bulursam ispatı tamamlamış olacağım o yüzden böyle bir şey yaptım.” (Satır, 92-95)

Tablo 13 katılımcıların adımlar arası ilişkilendirme yaparak geçiş yapmaya çalıştıklarını ve işlemleri farklı şekillerde analiz edip birbiriyle ilişkilendirdiklerini göstermektedir. Başka bir ifadeyle katılımcılar bir adımda yapmış olduğu işlemle, sonraki adımda yaptığı işlem arasında bağlantı kurmaya çalışmaktadırlar. Bu durum katılımcıların “İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar.” becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

İlişkilendirme kategorisinde ulaşılan diğer üst bilişsel beceri “Sorular sorarak ilişkilendirme yapar.” kodudur. Bu beceriyi her iki önermede de sergileyen katılımcı Ö<sub>02</sub>'dir. Katılımcının 1. önermede kurduğu “[20.16] Şimdi benim burada dikkat etmem gereken şu:  $k^2 + k + 1$ 'de bir tane k sayısının eksik olması. Bu k sayısını nereden getireceğim? (Satır, 119-121)” cümleler “Sorular sorarak ilişkilendirme yapar.” becerisini bu önermede sergilediğine örnek olarak verilebilir. 2. önermede kullandığı “[26.15] ...Göstermek istediğim bu en son elimde olan  $a.k=b.l$ . Bir şey daha biliyorum, a ile b'nin ortak katlarının 1 olması... k ve l hakkında ne söyleyebilirim? (Satır, 154-156)” ifadeleri de beceriyi bu önermede sergilediğine örnek olarak verilebilir.

İlişkilendirme kategorisinde “İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar.” ve “Sorular sorarak ilişkilendirme yapar.” kodlarına ulaşılmıştır. Bu beceriler kişinin üst düzey akıl yürütmesini gerekli kıldığından üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. İlişkilendirme yapmanın üst bilişsel beceri olduğunu gösteren çalışmalar alan yazında mevcuttur (Cozza ve Oreshkina, 2013; Yang, 2012; Zazkis vd., 2016). İlişkilendirme kategorisinde elde edilen üst bilişsel becerilerin alan yazını desteklediği söylenebilir.

Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen son kategori ise “Analojik akıl yürütme” kategorisidir. Bu kategoride “Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar.”, “Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar.” ve “Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar.” becerilerine ulaşılmıştır.

Analojik akıl yürütme kategorisinde ulaşılan üst bilişsel becerilerin ilki “Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının ifadelerinden örnekler Tablo 14'de sunulmuştur.

**Tablo 14.** “Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının İfadeleri

Katılımcı	Önerme	Görüşü
Ö <sub>11</sub>	1	“[14.47] ... Bir de diziyi tersten yazayım aslında bunu daha önceden ispatlamadım. 1'den n'ye kadar sayıların toplamından kullandığım mantığı kullanacağım.” (Satır, 101-102)
ÖAS <sub>01</sub>	2	“[32.50] Şunu denedim hocam, ardışık toplamları çift ve tek olması durumu. Ama öyle olunca sonuçta her 4 tane sayı aldığımında... Önceki sorduğunuzda bunu yapmıştım ama yine böyle 2k, 2k+2 gibi bir şey vermiştim öyle hatırlıyorum. Yani onu buna uyarlıyorum. (Satır, 84-86)”

Tablo 14 incelendiğinde katılımcıların daha önce kullanıp doğru sonuca ulaşmış oldukları çözüm yoluna değiştirip yeni probleme (ispata) uyarladıkları görülmektedir. Bu durum katılımcıların “Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analogik akıl yürütme yapar.” becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

Analojik akıl yürütme kategorisinde ulaşılan bir diğer üst bilişsel beceri “Kümenin tümleyeninden yararlanarak analogik akıl yürütme yapar.” kodudur. Sadece 1. Önermede sergilendiği belirlenen bu beceriyi sergileyen ÖA1b2'nin “[30.50] *Evet, şeyden çalıştım bu terim toplamından çift sayılarınkini hatırlarsam ardışık çift sayılarınkini hatırlarsam farkını alırsam tek sayılarınki çıkar dedim ama çift sayılarınkinden de emin değilim.* (Satır, 216-218)” ifadeleri bu beceriye örnek olarak verilebilir. İfadeler incelendiğinde katılımcının tek sayıların toplamı için çift sayıların toplamından yani tek sayıların tümleyenini kümesinden yola çıktığı anlaşılmaktadır. Bu durum katılımcının “Kümenin tümleyeninden yararlanarak analogik akıl yürütme yapar.” becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

Analojik akıl yürütme kategorisinde ulaşılan son üst bilişsel beceri “Önermenin tersinden yararlanarak analogik akıl yürütme yapar.” kodudur. Sadece 2. Soruda sergilendiği belirlenebilen beceriyi sergilediği belirlenen Ö2'nin ifadeleri aşağıda sunulmuştur (Satır, 162-166):

“[25.17] Böyle bir önerme ile karşılaşmıştım. Daha doğrusu şöyle diyeyim, biz daha çok bu önermenin tersini kullanıyoruz. Mesela, bir sayı 12 ile bölünebiliyorsa 3 ve 4 ile de bölünebilir. Lise düzeyinde daha çok kullandığımız bu. Ya da 24 ile bölünüyorsa 8 ve 3 ile bölünür gibi. Aslında daha çok kullandığımız bu. Mantıken de akla yatıyor bu önerme. Parça parça bölünüyorsa bütününde bölünmesi gerekir.”

Öğretmenin ifadeleri incelendiğinde önermenin tersiyle daha önce karşılaştığını ifade etmektedir. Başka bir ifadeyle çift taraflı olan bu önermenin tersine dair ispatı öğretmenin bildiği anlaşılmaktadır. Öğretmen ispatı yaparken önermenin tersinden yararlanmak istediği için “Önermenin tersinden yararlanarak analogik akıl yürütme yapar.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategoride “Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analogik akıl yürütme yapar.”, “Kümenin tümleyeninden yararlanarak analogik akıl yürütme yapar.” ve “Önermenin tersinden yararlanarak analogik akıl yürütme yapar.” becerilerine ulaşılmıştır. Bu beceri kişinin daha önce kullanmış olduğu bir yöntemi yeni probleme uyarlamasını (kendi bilgisi (bilisi) üzerine düşünerek işlem yapmasını gerektirmektedir) başka bir ifadeyle doğru mantıksal muhakeme yapmasını gerektirmektedir. Bu nedenle bu kategoride ele alınan tüm beceriler üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazında analogik akıl yürütme becerisinin üst düzey düşünme becerisi olduğunu gösteren çalışmalar mevcuttur (Goldstein, 2013; Smith ve Kosslyn, 2014).

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan kodların önermelere ve katılımcılara göre dağılımı Tablo 15’de sunulmuştur.

**Tablo 15.** Üst Bilişsel Beceriler Temasında Sergilenen Becerilerin Sorulara ve Katılımcılara Göre Dağılımı

Kategori	Kod	Sorular		Beceriye Sergileyen Öğretmenler		Beceriye Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriye Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	No	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
İşlemleri kolaylaştırma	Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar	2	1.S 2.S	1	Ö <sub>i1</sub> Ö <sub>i2</sub>	1	ÖAS <sub>i2</sub> ÖAS <sub>D2</sub> - ÖAS <sub>O1</sub>	-	-
	İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır	1	2.S	-	-	1	ÖAS <sub>D1</sub>	-	-
	İspatın anahtar kavramlarını belirleyerek ispatı kolaylaştırmayı amaçlar	1	2.S	1	Ö <sub>i1</sub>	1	ÖAS <sub>i1</sub>	-	-
	Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür	2	1.S 2.S	2	Ö <sub>D1</sub> - Ö <sub>i1</sub> Ö <sub>O2</sub>	3	ÖAS <sub>D1</sub> - ÖAS <sub>O2</sub> - ÖAS <sub>i1</sub> ÖAS <sub>D1</sub> -ÖAS <sub>O1</sub>	-	-
Sorgulama	Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar	2	1.S 2.S	1	Ö <sub>i1</sub> Ö <sub>O2</sub>	-	- ÖAS <sub>D1</sub>	-	-
	Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar	1	1.S	1	Ö <sub>O2</sub>	-	-	-	-
	İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar	1	1.S	1	Ö <sub>D1</sub>	-	-	-	-
	İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar	1	2.S	1	Ö <sub>i1</sub>	-	-	-	-
Farkındalık	İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır	1	2.S	-	-	1	ÖAS <sub>O1</sub>	-	-
	Yansıtıcı düşünme becerisi sergiler	1	2.S	1	Ö <sub>O1</sub>	1	ÖAS <sub>i1</sub>	-	-
	Önermede yer alan tüm ifadelerin ispatta kullanılacağını farkındadır	1	2.S	-	-	1	ÖAS <sub>i2</sub>	-	-
Planlama	Sonuca yönelik tahminde bulunur	1	1.S	-	-	1	ÖAS <sub>O2</sub>	-	-
	İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir	1	2.S	1	Ö <sub>O1</sub>	-	-	-	-
	Soru sorarak hedefini belirler	1	2.S	2	Ö <sub>O2</sub> - Ö <sub>i2</sub>	-	-	-	-
	İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker	1	2.S	1	Ö <sub>O2</sub>	-	-	-	-
Strateji belirleme	İraksak düşünme yeteneğini kullanır	1	1.S	1	Ö <sub>O1</sub>	1	ÖAS <sub>i1</sub>	-	-
	Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır	1	1.S	1	Ö <sub>O1</sub>	1	ÖAS <sub>i1</sub>	-	-
Kontrol etme	Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir	2	1.S 2.S	2	Ö <sub>O2</sub> - Ö <sub>i2</sub> Ö <sub>i1</sub>	3	ÖAS <sub>O1</sub> - ÖAS <sub>i1</sub> - ÖAS <sub>i2</sub>	-	-
	Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşmadığını kontrol eder	1	1.S	-	-	1	ÖAS <sub>i1</sub>	-	-
	Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başında dönerek tekrar çözüm yapar.	1	2.S	1	Ö <sub>O2</sub>	-	-	-	-
	Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder	1	2.S	1	Ö <sub>i2</sub>	-	-	-	-

Tablo 15. Devamı

Kategori	Kod	Sorular		Beceriye Sergileyen Öğretmenler	Beceriye Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları	Beceriye Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları			
		f	No	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
İlişkilendirme	İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar	2	1.S	1	Ö <sub>11</sub>	-	-	-	-
			2.S	2	Ö <sub>01</sub> - Ö <sub>11</sub>	1	ÖAS <sub>12</sub>	-	-
	Sorular sorarak ilişkilendirme yapar	2	1.S	1	Ö <sub>02</sub>	1	ÖAS <sub>11</sub>	-	-
			2.S	1	Ö <sub>02</sub>	-	ÖAS <sub>11</sub>	-	-
Analojik akıl yürütme	Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar	2	1.S	2	Ö <sub>11</sub> - Ö <sub>12</sub>	2	ÖAS <sub>02</sub> - ÖAS <sub>11</sub>	-	-
			2.S	-	-	2	ÖAS <sub>01</sub>	1	ÖA <sub>12</sub>
	Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar	1	1.S	1	Ö <sub>D1</sub>	-	-	1	ÖA <sub>12</sub>
		1	2.S	1	Ö <sub>11</sub>	-	-	-	-
	Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar								



Tablo 15 incelendiğinde üst bilişsel beceriler temasında en sık sergilenen becerinin “Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür.” kodu olduğu belirlenmiştir. Bu temada en az sıklıkta sergilendiği belirlenen beceriler ise “İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır.”, “Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar.”, “İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar.”, “İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar.”, “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.”, “Sonuca yönelik tahminde bulunur.”, “İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir.”, “İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker.”, “Hedeflediği sonuca ulaşım ulaşamadığını kontrol eder.”, “Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar.”, “Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder.” ve “Önermenin tersinden yararlanarak analogik akıl yürütme yapar.” kodlarıdır. Kategoriler bağlamında değerlendirildiğinde en sık sergilendiği belirlenen kategori “Sorgulama” kategorisi iken en az sergilenen kategori “Strateji belirleme” kategorisidir. Öğretmenlerin ve son sınıf öğretmen adaylarının en fazla sergilediği üst bilişsel beceri “Sorgulama” kategorisinde yer almaktadır. 1. sınıf öğretmen adayları ise sadece “Analogik akıl yürütme yapar” kategorisine yönelik üst bilişsel beceri sergilemiştir.

#### *Nicel ve Nitel Verilerin İlişkilendirilmesine Yönelik Bulgular ve Tartışma*

Nicel verilerden elde edilen bulgular, öğretmenler ve son sınıf öğretmen adaylarının ispat yapma becerisi teşhis testi başarı puanlarının 1. sınıf öğretmen adaylarından anlamlı düzeyde yüksek olduğunu göstermiştir. Üst bilişsel beceriler temasında sergilenen beceri sayıları dikkate alındığında ispat yapma becerisi teşhis testi puanlarında görülen farklılığın üst bilişsel beceri sayısında da olduğu görülmektedir. Başka bir ifadeyle matematik öğretmeni ve son sınıf matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecinde sergiledikleri üst bilişsel beceri sayılarının 1. sınıf öğretmen adaylarından fazla olduğu belirlenmiştir. Benzer durum bilişsel beceriler içinde söz konusudur. Ancak üst bilişsel beceriler temasında gruplar arasındaki farklılık sayısal olarak daha fazladır. Özsoy ve Günindi (2011) yaptıkları çalışmada okulöncesi öğretmen adaylarının sergiledikleri üst bilişsel farkındalıkları gelişimsel olarak incelemiştir. Araştırmacılar üst bilişsel farkındalıkların 4. sınıf öğretmen adayları lehine anlamlı düzeyde farklılaştığını belirlemiştir. Tüysüz, Karakuyu ve Bilgin (2008) sınıf öğretmeni adaylarının üst biliş düzeylerinin sınıf düzeyinin yükselmesine bağlı olarak arttığını belirlemişlerdir. Bu çalışmada elde edilen 1. sınıf öğretmen adaylarının ispat başarı testi puanlarının ve bilişsel-üst bilişsel beceri sayılarının en az olması ile öğretmenlerin ispat başarı testi puanlarının ve bilişsel-üst bilişsel beceri sayılarının en fazla olması bulguları sözü geçen çalışmaların bulgularını desteklemektedir.

#### **Sonuç ve Öneriler**

Matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecinde sergilediği becerileri bilişsel açıdan karakterize etmeye yönelik yapılan bu çalışma, nicel ve nitel bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın nicel bölümünde elde edilen bulgular, matematik öğretmeni ve son sınıf matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma becerilerinin 1. sınıf matematik öğretmeni adaylarından anlamlı düzeyde yüksek olduğunu göstermektedir. İspat yapma sürecinde sergilenen bilişsel ve üst bilişsel beceri sayılarının da katılımcıların ispat yapma becerisi teşhis testinden aldıkları puanlarla benzerlik gösterdiği belirlenmiştir. Başka bir ifadeyle ispat yapma sürecinde sergilenen bilişsel ve üst bilişsel beceri sayısı öğretmenlerde en fazla, ardından son sınıf öğretmen adaylarında iken, en az sergilenen beceri sayısı 1. sınıf öğretmen adaylarındadır.

Çalışmanın nitel bölümünde elde edilen bulgularda katılımcıların ispat yapma sürecindeki bilişsel süreçleri bilişsel beceriler ve üst bilişsel beceriler olarak iki temada toplanmıştır. Bilişsel beceriler temasında “İspat önermesini okuma”, “Doğruluğunu değerlendirme”, “Strateji belirleme”, “İşlem süreci” ve “Sezgisel kestirme yolları” kategorilerine ulaşılmıştır. Üst bilişsel beceriler temasında “İşlemleri kolaylaştırma”, “Sorgulama”, “Farkındalık”, “Planlama”, “Strateji belirleme”, “Kontrol etme”, “İlişkilendirme” ve “Analogik akıl yürütme” olarak sekiz kategori oluşmuştur.

Çalışmanın nicel bulguları gelişimsel olarak değerlendirilirse bireylerin aldıkları eğitim arttıkça ispat yapma becerilerinin de arttığı söylenebilir. Ayrıca öğretmenlerin ispat yapma becerisi puanlarının öğretmen adaylarından yüksek çıkması, mesleki yaşamlarına devam ettiklerinde de ispat yapma becerilerinin geliştiğini göstermektedir. Aynı durum ispat yapma sürecinde sergiledikleri bilişsel ve üst bilişsel beceri sayıları için de söz konusudur. Bu durum lisans düzeyindeki öğretmen adaylarının formal ispat yaparken, öğretmenlerin informal ispat yaptığı şeklinde yorumlanabilir. Arcavi ve diğerleri (2017) öğretmenlerin öğretecekleri konuya iki farklı bakış sergilemeleri gerektiğini, bunlardan birinin kendi bakış açısı, diğerinin ise öğrencilerin bakış açıları olması gerektiğini belirtmiştir. Öğretmenler sürekli uygulama ortamında olduklarından, öğrencilerin bakış açılarına göre de ispata bakmaları olağandır. Bu durum ispatı kendileri için formal olmaktan çıkarıp, anlamaya ve üst bilişsel beceriler sergileyerek ne yaptıklarının farkında olmalarını sağlamış olabilir.

Çalışmanın nitel bulguları incelendiğinde, matematik öğretmenlerinin ve öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecinde bilişsel becerileri, üst bilişsel becerilerden sayıca daha fazla kullandıkları belirlenmiştir. Bu bulgu, katılımcıların ispat yaparken ne yaptıklarının farkında olmadıklarını, yeterince sorgulama ve değerlendirme yapmadıklarını göstermektedir. Bu durum öğretmen adaylarının ispat öğretimi yapılan derslerde ispat yapmayı kavramsal öğrenemedikleri şeklinde yorumlanabilir. Bu sorunu çözebilmek için ilk adım olarak bireylerdeki ispatın ezberlenerek yapılabilecek bir kavram olduğu algısının yıkılması gerektiği düşünülmektedir. Bunun için öğretmenler sınıflarında ispatı doğrudan öğreten olmaktan vazgeçip, öğrencinin akıl yürütmesini sağlayarak kendi ispatlarının kendilerinin organize edebileceği rehber rolüne geçmelidir. Bununla birlikte ispat öğretiminin yapıldığı dersleri yürüten öğretim elemanları ispat sürecini anlamaya yönelik sorular sorarak, her işlem için neden yaptığını açıklayarak ve ispatı tamamladıktan sonra doğruluğunu sesli olarak değerlendirerek öğrencide (öğretmen adayında) farkındalığı sağlamalıdır. Buna yönelik olarak öğretmenlere de hizmet içi eğitimler verilerek ispatı nasıl öğretecekleri konusunda farkındalık oluşturulabilir. Çünkü üst bilişsel beceriler öğretilirdir ve bu becerilerin öğrenilmesi kişinin ispatı anlamasına yardımcı olur, öğrenmesini hızlandırır.

Çalışmada ulaşılan bir başka sonuç da, katılımcıların lemma kullanılması gereken aşamada lemmayı bilmediklerinden ispatı yapamayarak, sezgisel kestirme yollarına başvurmalarıdır. Çalışmanın katılımcıları matematiksel notasyonları kullanmakta güçlük yaşamışlardır ve çok azı aksiyomatik ispat şemasına göre gerekçelendirme yapmıştır. Bu durum da ispat öğretimine yönelik bir dersin zorunluluk olduğunu göstermektedir. Öğretim programlarında yer alan derslerde sadece ispat yapılan derslerin değil ispat öğretiminin yapıldığı derslerinde yer alması gerekmektedir. Şu an ki yükseköğretim programları içerisinde Soyut Matematik dersinde ispat öğretimine yer verilmektedir. Ancak bu dersin süresi ispat öğretimi için yeterli değildir. Çünkü nasıl problem çözme stratejilerini tam olarak bilmeyen bir öğrenciden istenilen düzeyde problem çözmesi beklenemezse, ispat yöntemlerini bilmeyen öğretmenden de istenilen düzeyde ispat yapması beklenemez. Bu nedenle Soyut Matematik dersinin üzerine gerekli çalışmalar yapıp, etkinlikler geliştirilerek ispat öğretimine yönelik bir ders konulmalıdır.

Bu çalışmada ispat yapma başarısının üst bilişsel beceri sergileme sıklığı ile paralellik gösterdiği belirlenmiştir. Ancak "Üst bilişsel becerilerin gelişmesi mi ispat başarısını arttırmaktadır, yoksa ispat başarısının artması mı üst bilişsel beceri sayısını arttırmaktadır?" sorusu araştırma kapsamı dışında tutulmuştur. Gelecek araştırmacılar bu probleme yönelik nedensel karşılaştırma araştırmaları veya deneysel çalışmalar yaparak çözüm arayabilirler.

### Kaynakça

- Akın, A. (2013). Bilişötesi. A. Akın (Ed.), *Güncel psikolojik kavramlar 1 Pozitif psikoloji* içinde (s. 114-164). Sakarya: Sakarya Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. F. Hitt, D. Holton ve P. W. Thompson, (Ed.), *Research in collegiate mathematics education VII* içinde (s. 63-91). Washington: American Mathematical Society.
- Alcock, L. ve Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134.
- Aljaberi, N. M. (2014). Pre-service elementary school teachers' level of mathematical thinking and their attitudes toward mathematics. *Journal of Education and Human Development*, 3(3), 181-195.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890. doi: 10.1080/00207390050203360
- Arcavi, A., Drijvers, P. ve Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights, and activities*. New York, NY: Routledge.
- Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31.
- Aydemir, H. ve Kubanç, Y. (2014). Investigation of the cognitive behavioral problem solving process. *Turkish Studies*, 9(2), 203-219. doi: 10.7827/TurkishStudies.6555
- Aydın, U. ve Ubuz, B. (2010). Turkish version of the junior metacognitive awareness inventory: The validation study. *Education and Science*, 35(157), 30-45.
- Aydoğdu-İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. In E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat, (Ed.) *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 65-84). Ankara: Pegem Akademi.
- Barnard, T. ve Tall, D. (1997). Cognitive units, connections an mathematical proof. *Proceeding of PME 21* içinde (s. 41-48). Lahti, Finland: The International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1-2), 23-40.
- Berggren, J. L. (1990). Proof, pedagogy, and the practice of mathematics in medieval Islam. *Interchange*, 21(1), 36-48.
- Bruning, R. H., Schraw, G. J. ve Norby, M. M. (2014). *Bilişsel psikoloji ve öğretim* (5. bs., Z. N. Ersözlü ve R. Ülker, Çev.). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.
- Čadež, T. H. ve Kolar, V. M. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics*, 89(2), 283-306. doi: 10.1007/s10649-015-9598-y
- Ceylan, T. (2012). *Investigating preservice elementary mathematics teachers' types of proofs in GeoGebra environment* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Ankara University, Ankara.
- Copur-Gençtürk, Y. ve Lubienski, S. T. (2013). Measuring mathematical knowledge for teaching: a longitudinal study using two measures. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(3), 211-236. doi: 10.1007/s10857-012-9233-0.
- Cozza, B. ve Oreshkina, M. (2013). Cross-cultural study of cognitive and metacognitive processes during math problem solving. *School Science and Mathematics*, 113(6), 275-284.
- Creswell, J. W. (2017). *Karma yöntem araştırmalarına giriş* (M. Sözbilir, Çev.). Ankara: Pegem Akademi.
- Creswell, J. W. ve Plano Clark, V. L. (2014). *Karma yöntem araştırmaları: Tasarımı ve yürütülmesi* (Y. Dede, S. B. Demir ve A. Delice, Çev.). Ankara, Türkiye: Anı Yayıncılık.

- Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları* (Yayımlanmamış doktora tezi). Pamukkale Üniversitesi, Denizli.
- Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(2), 47-71. doi: 10.17984/adyuebd.52880
- Demiray, E. ve Işıksal Bostan, M. (2017). Pre-service middle school mathematics teachers' evaluations of discussions: the case of proof by contradiction. *Mathematics Education Research Journal*, 29(1), 1-23.
- Doruk, M. (2016). *Investigation of preservice elementary mathematics teachers' argumentation and proof processes in domain of analysis* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Doruk, M. ve Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2), 315-328.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. F. Hitt ve M. Santos (Ed.) *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (s. 3-26). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Erdem, A. R. (2005). Öğrenmede etkili yollar: öğrenme stratejileri ve öğretimi. *İlköğretim-Online*, 4(1), 1-6.
- Fang, Z. ve Cox, B. E. (1999). Emergent metacognition: A study of preschoolers' literate behavior. *Journal of Research in Childhood Education*, 13(2), 175-187. doi: 10.1080/02568549909594738
- Fersahoğlu, Y. (2015). *Kur'an'da zihin eğitimi*. İstanbul: Marifet Yayınları.
- Field, A. (2009). *Discovering statistics using* (3 ed.). London: Sage Publication.
- Fitzgerald, J. F. (1996). Proof in mathematics education. *The Journal of Education*, 178(1), 35-45.
- Forrest-Pressley, D. L. ve Gillies, L. A. (1983). Children's flexible use of strategies during reading. M. Pressley ve J. R. Levin (Ed.) *Cognitive strategy research: Educational applications* içinde (s. 133-156). New York, NY: Springer-Verlag New York Inc.
- Fukawa-Connelly, T. P. (2012). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 325-345. doi: 10.1007/s10649-012-9407-9
- Goldstein, E. B. (2013). *Bilişsel psikoloji* (O. Gündüz, Çev.). İstanbul: Kaknüs Yayınları.
- Güler, G. (2013). *Investigation of pre-service mathematics teachers' proof processes in the learning domain of algebra* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Güler, G. ve Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83.
- Gürsakal, N. (2013). *Çıkarımsal istatistik*. Bursa: Dora.
- Hamilton, E., Kelly, A. E. ve Sloane, F. (2002). Funding mathematics education research: Three challenges, one continuum, and a metaphor. L. D. English (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education* içinde (s. 507-524). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.
- Harel, G. ve Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from Exploratory Studies. J. Kaput, A. H. Schoenfeld ve E. Dubinsky (Ed.) *Research in Collegiate Mathematics Education III (Cbms Issues in Mathematics Education)* içinde (pp. 234-283). Washington: American Mathematical Society.
- Harel, G. ve Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* içinde (s. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.
- Hesse-Biber, S. (2010). Qualitative Approaches to Mixed Methods Practice. *Qualitative Inquiry*, 16(6), 455-468. doi: 10.1177/1077800410364611



- Irak, M. (2005). Hatırlamanın ve unutmanın farkındalığı: Sağlıklı bireylerde ve bazı beyin hasarlarında üst-biliş sürecinin işleyişi [Özel Ek Sayı]. *Türk Psikoloji Yazıları*, 8, 1-15
- İmamoğlu, Y. ve Yontar-Toğrol, A. (2010). Freshmen and senior teaching science and mathematics students' proving patterns and conceptualizations of the nature and role of proof in school mathematics. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, 1(2), 79-87.
- Jiang, Y., Ma, L. ve Gao, L. (2016). Assessing teachers' metacognition in teaching: The teacher metacognition inventory. *Teaching and Teacher Education*, 59, 403-413. doi: 10.1016/j.tate.2016.07.014
- Kaplan, A. ve Duran, M. (2015). Ortaokul öğrencilerinin matematik dersine çalışma sürecinde üstbilişsel farkındalık düzeylerinin karşılaştırılması. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2), 417-445.
- Karakelle, S. ve Saraç, S. (2010). Çocuklar için üst bilişsel farkındalık ölçeği (ÜBFÖ-Ç) A ve B formları: geçerlik ve güvenilirlik çalışması, *Türk Psikoloji Yazıları*, 10(20), 87-103.
- Kieran, C. (2017). Cognitive neuroscience and algebra: Challenging some traditional beliefs. S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* içinde (s. 157-172). Switzerland: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-45053-7\_9
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61-88.
- Komatsu, K. (2016). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 1-16. doi: 10.1007/s10649-016-9731-6
- Krueger, F., Spampinato, M. V., Pardini, M., Pajevic, S., Wood, J. N., Weiss, G. H., ... Grafman, J. (2008). Integral calculus problem solving: An fMRI investigation. *Neuroreport*, 19(11), 1095-1099. doi: 10.1097/WNR.0b013e328303fd85
- Lesseig, K. (2016). Conjecturing, generalizing and justifying: Building theory around teacher knowledge of proving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(3), 1-31.
- MacDonald, T. H. (1973). The role of heuristic proof in mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 4(2), 103-107. doi: 10.1080/0020739730040203
- Martin, W. G. ve Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.
- McKeown, M. G. ve Beck, I. L. (2009). The role of metacognition in understanding and supporting reading comprehension. D. J. Hacker, J. Dunlosky ve A. C. Graesser (Ed.), *Handbook of metacognition education* içinde (s. 7-25). New York, NY: Taylor ve Francis.
- Metallidou, P. (2009). Pre-service and in-service teachers' metacognitive knowledge about problem-solving strategies. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 76-82. doi:10.1016/j.tate.2008.07.002
- Miles, M. B. ve Huberman, A. M. (2015). *Genişletilmiş bir kaynak: Nitel veri analizi* (A. Ersoy ve S. Akbaba Altun, Çev.). Ankara: Pegem Akademi.
- Mokhtari, K. ve Reichard, C. A. (2002). Assessing students' metacognitive awareness of reading strategies. *Journal of Educational Psychology*, 94(2), 249-259. doi:10.1037//0022-0663.94.2.249
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Newman, S. D., Carpenter, P. A., Varma, S ve Just, M. A. (2003). Frontal and parietal participation in problem solving in the Tower of London: fMRI and computational modeling of planning and high-level perception. *Neuropsychologia*, 41(12), 1668-1682. doi:10.1016/S0028-3932(03)00091-5
- Nool, N. R. (2012). Exploring the Metacognitive Processes of Prospective Mathematics Teachers during Problem Solving. *International Proceedings of Economics Development and Research*, 30, 302-306.
- Okçu, V. ve Kahyaoğlu, M. (2007). İlköğretim öğretmenlerinin biliş ötesi öğrenme stratejilerinin belirlenmesi. *Süleyman Demirel Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(2), 129-146.



- Özdemir, E. Y. ve Sarı, S. (2016). Matematik öğrenme ve problem çözmeye üstbilişin rolü. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler içinde* (s. 655-676). Ankara: Pegem Akademi.
- Özkaya, M. ve İşleyen, T. (2012). Fonksiyonlarla ilgili bazı kavram yanılgıları. *Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 3(1), 1-32.
- Özsoy, G. (2008). Üstbiliş. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 6(4), 713-740.
- Özsoy, G. ve Günindi, Y. (2011). Okulöncesi öğretmen adaylarının üst bilişsel farkındalık düzeyleri. *İlköğretim Online*, 10(2), 430-440.
- Öztürk, M., Akkan, Y. ve Kaplan, A. (2014). Üstün yetenekli öğrencilerin problem çözerken sergiledikleri üst bilişsel becerilerin incelenmesi: Gümüşhane ili örneği. 11. *Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi* içinde (s. 341). Adana: Çukurova Üniversitesi.
- Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2017). Matematik öğretmenlerine yönelik ispat yapma teşhis testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(1), 360-381.
- Paris, S. G. ve Winograd, P. (1998). *The role of self-regulated learning in contextual teaching: principles and practices for teacher preparation*. Columbus, OH.: ERIC Clearinghouse on Adult, Career, and Vocational Education.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research ve evaluation methods* (3. bs.). London: Sage Publications, Inc.
- Plotnik, R. (2009). *Psikoloji'ye giriş* (T. Geniş, Çev.). İstanbul: Kaknüs Yayınları.
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 319-325.
- Rice, L. A. (2014). *Pre-service secondary mathematics teachers' thinking in proof and argumentation* (Yayımlanmamış doktora tezi). University of Wyoming, Wyoming.
- Rosenholtz, S. J. (1985). Political myths about education reform: lessons from research on teaching. *Phi Delta Kappan*, 66(5), 349-355.
- Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A. ve Molina, Ó. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 35-50. doi: 10.1007/s10649-016-9683-x
- Schraw, G. ve Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology*, 19(4), 460-475. doi: 10.1006/ceps.1994.1033
- Selden, A. ve Selden, J. (2015). A theoretical perspective for proof construction. *9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 9)* içinde (198-204). Prague: Charles University.
- Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher*, 78, 448-456.
- Smith, E. E. ve Kosslyn, S. M. (2014). *Bilişsel psikoloji: Zihin ve beyin* (M. Şahin, Çev.). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.
- Solow, D. (2014). *How to read and do proofs: An introduction to mathematical thought processes* (6. bs.). New York: John Wiley ve Sons, Inc.
- Solso, R. L., Maclin, M. K. ve Maclin, O. H. (2014). *Bilişsel psikoloji* (A. Ayçiçeği-Dinn, Çev.). İstanbul: İstanbul Kitabevi.
- Sowder, L. ve Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.
- Sternberg, R. J. (2000). *Handbook of human intelligence*. New York: Cambridge University Press.
- Stylianides, A. J. ve Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 237-253. doi: 10.1007/s10649-009-9191-3
- Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 365-378.

- Tüysüz, C., Karakuyu, Y. ve Bilgin, İ. (2008). Öğretmen adaylarının üst biliş düzeylerinin belirlenmesi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 17(2), 147-158.
- Weinert, F. (1987). Metacognition and motivation as determinants of effective learning and understanding. F. Weinert ve R. Kluwe (Ed.), *Metacognition, motivation, and understanding* içinde (s. 1-15). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Woolfolk-Hoy, A. (2015). *Eğitim psikolojisi* (D. Özen, Çev.). İstanbul: Kaknüs Yayınları.
- Yang, K. L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 307-326.
- Yang, K. L. ve Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59-76.
- Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme* (3. bs.). İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yüksel, G. (2004). Bilişsel-toplumsal yaklaşım. A. Ataman (Ed.) *Gelişim ve öğrenme* içinde (s. 317-339). Ankara: Gündüz Eğitim ve Yayıncılık.
- Zazkis, D., Weber, K. ve Mejía-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 155-173. doi: 10.1007/s10649-016-9698-3