

## 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünmenin Aşamalarındaki Yaşantılarından Yansımalar

### Reflections from the Experiences of 11<sup>th</sup> Graders during the Stages of Mathematical Thinking

Selahattin ARSLAN\*      Cemalettin YILDIZ\*\*  
Karadeniz Teknik Üniversitesi

#### Öz

Bu çalışmada, nitel araştırma yaklaşımı kullanılarak 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımında bulunma ve ispatlama aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Matematiksel düşünmenin aşamalarını dikkate alan ve her biri dokuz sorudan oluşan çalışma yapıları geliştirilmiş ve pilot çalışmadan sonra 24 lise öğrencisine uygulanmıştır. Çalışmanın sonuçları matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe öğrenci başarısının düştüğünü ortaya koymuştur. Bu bakımdan, öğrencilerin özelleştirmede iyi performans sergiledikleri, ispatlamada ise büyük sıkıntı çektikleri tespit edilmiştir. Ayrıca, genelleme ve varsayımında bulunma aşamalarında öğrencilerin cevaplarının sözel ve cebirsel, ispatlama aşamasında ise aritmetik, geometrik ve cebirsel kodları altında toplandıkları belirlenmiştir. Çalışmanın sonuçlarına dayanarak çeşitli öneriler sunulmuştur.

*Anahtar Sözcükler:* Ortaöğretim, matematiksel düşünme, matematiksel düşünmenin aşamaları

#### Abstract

This study aimed to reveal the experiences of 11th grade students related to specializing, generalizing, conjecturing and proving stages of mathematical thinking. Worksheets, each consisting of 9 questions included the stages of mathematical thinking, and this pilot study was applied to 24 students. The results of the study demonstrated that student achievement decreased as the stages of mathematical thinking progressed. From this point of view, students were found to demonstrate a good performance in specializing stage and to have a big difficulty in proving stage. Moreover, the students' answers in generalizing and conjecturing stages were observed to accumulate under verbal and algebraic codes and in proving stages the answers were found to accumulate under the codes of arithmetic, geometric and algebraic. Suggestions are made based on the results of the study.

*Keywords:* Secondary Education, Mathematical Thinking, Stages of Mathematical Thinking

#### Summary

#### Purpose

The most fundamental quality of humans distinguishing them from the other living things is the ability to think, interpret and organize events. One of the most important tools that improve thinking is mathematics (Tural, 2005). Mathematical thinking may be defined as "using mathematical technique, concept and methods directly or indirectly in the process of problem

\* Yrd. Doç. Dr. Selahattin ARSLAN, KTÜ, Fatih Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, selaharslan@yahoo.fr

\*\* Arş. Gör. Cemalettin YILDIZ, KTÜ, Fatih Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, cemalyildiz61@hotmail.com

solving” (Henderson et al., 2004). Individuals use mathematical thinking to analyze events and phenomena in every stage of their lives consciously or not. Mathematical thinking is an abstract concept. The most distinguishing characteristics of mathematical thinking are making predictions based on existing knowledge and skills, making generalization, assumption, abstraction, reasoning and proof (Alkan and Bukova Güzel, 2005). In this study, it was aimed to reveal the experiences of 11<sup>th</sup> grade students related to specializing, generalizing, conjecturing and proving stages of mathematical thinking.

#### *Method*

Qualitative research method was used in this study. In the selection of the study group (24 volunteered students), the purposeful sampling was used within the framework of the research.

The data in this study were collected using three worksheets and unstructured observations during the implementation. In the analysis stage, in order to reveal students’ experiences during the stages of mathematical thinking, first of all the answers of the groups to each question were tabulated. Then, the data in these tables were perused by the researchers several times and template codes were developed. The codes on which the two researchers could not compromise were discussed. Finally, the codes that were derived as a result of the comparisons were presented in tables.

#### *Results*

All students were found to be successful during the specializing stage. The students’ answers related to specializing stage were found to accumulate under the codes of drawing a systematic shape, finding the required solutions for a special case and skipping specializing stage. The students’ answers in generalizing and conjecturing stages were observed to accumulate under verbal and algebraic codes and in proving stages the answers were determined to accumulate under the codes of arithmetic, geometric and algebraic.

#### *Discussion*

Since the students answered most of the questions related to specializing stage show that the students do not face much trouble at this stage. The emphasis on case study questions that aim reinforcement of operational skills in elementary and secondary education is thought to be effective in this result. In the generalizing and conjecturing stages, the students usually tend to explain the relation between two variables using verbal expressions and this shows that the students may be experiencing difficulties in expressing relationship between two variables using symbols. This shows that students are not competent enough in generalizing and conjecturing stages. However even elementary students are expected to propose hypotheses and suggestions, assess them, use inductive and deductive reasoning by formulating mathematical arguments and develop and retain their reasoning skills. The groups were found inclined to prove their hypotheses arithmetically (by assigning values to the variable) and were even unsuccessful in this attempt. This result aligns with the results of previous studies (Morali, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006; Özer & Arıkan, 2002).

#### *Conclusion*

The results of the study showed that student achievement decreased as the stages of mathematical thinking progressed. Furthermore, it was also determined that students might skip the stages from time to time and refer to different stages during a single stage. On the other hand, it can be claimed that the students demonstrated a good performance and did not face much trouble related to specializing stage. In the generalizing and conjecturing stages, it was concluded that the students usually tend to explain the relation between two variables using

verbal expressions and refrain from using mathematical expressions. The most challenging stages of mathematical thinking for the students were found to be proving stage. At this stage, the students tended to conduct arithmetic proofs which resemble specializing rather than using mathematically valid proofs.

### Giriş

İnsanı diğer canlılardan ayıran en temel özelliği, düşünebilme ve olaylardan anlam çıkarıp koşulları kendi lehine düzenleyebilme yeteneğidir. Düşünmeyi geliştiren en önemli araçlardan biri matematiktir (Tural, 2005). Matematik sadece sayıları, işlemleri öğretmekle kalmaz; her geçen gün karmaşıklaşan yaşam savaşında, düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminde bulunma, problem çözüme gibi önemli beceriler kazandırarak insana destek olur (Umay, 2003). Ayrıca matematik, bir düşünme biçimi, birtakım düşünme alışkanlıklarıdır (Baki, Güven ve Karataş, 2002).

Matematiğin bu özellikleri göz önüne alındığında, matematiğe özgü bir düşünmeden (matematiksel düşünme) bahsedilebilir. En genel anlamda matematiksel düşünme, “matematiksel teknik, kavram ve yöntemleri problem çözüme sürecinde dolaylı ya da doğrudan kullanmak” şeklinde tanımlanabilir (Henderson vd., 2004). Birey yaşamı boyunca okulda, işte, günlük hayatta problem çözüme çalışır (Blitzer, 2003) ve bunun için de matematiksel düşünmeye gereksinim duyar. Bu nedenle bireyler, yaşamlarının her aşamasında karşılaştıkları olay ve olguları çözümlenmede, farkında olarak ya da olmayarak, matematiksel düşünmeyi kullanırlar.

Matematiksel düşünmenin tanımı dikkate alındığında, oldukça soyut olduğu fark edilmektedir. Matematiksel düşünmeyi “somutlaştırmak” amacıyla araştırmacılar matematiksel düşünmenin özelliklerini, bileşenlerini ve matematiksel düşünmeyi diğer düşünmelerden ayıran hususları inceleme yoluna gitmişlerdir. Bu bağlamda, matematiksel düşünme tahmin etme, genelleme, varsayımda bulunup test etme, soyutlama, muhakeme etme, ispatlama ile yeni bir bilgi ya da kavrama ulaşma özellikleriyle diğer düşünmelerden ayrılır (Alkan ve Bukova Güzel, 2005).

Diğer yandan literatür incelendiğinde, farklı araştırmacıların matematiksel düşünmenin bileşenlerini ortaya koymaya çalıştıkları görülmektedir. Örneğin Tall (2002) matematiksel düşünmenin soyutlama (abstraction), sentezleme (synthesizing), genelleme (generalizing), modelleme (modelling), problem çözüme (problem solving) ve ispat (proof) gibi bileşenleri kapsadığını ifade etmektedir. Stacey, Burton ve Mason (1985) da matematiksel düşünmenin özelleştirme (specializing), genelleme (generalizing), varsayımda bulunma (conjecturing), doğrulama ve ikna etme (justifying and convincing) bileşenlerini incelemişlerdir. Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar (2003) ise Stacey, Burton ve Mason’un çalışmalarına dayanarak matematiksel düşünme sürecinin ayrıntılamak (özelleştirme), genelleştirmek, tahmin etmek ve ikna etmek bileşenlerinden oluştuğunu ifade etmişlerdir. Liu (2003) ise matematiksel düşünmeyi “tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, örnekleme, genelleme, analogi, formal ve informal olmayan usavurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi” olarak tanımlamıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalar incelendiğinde, matematiksel düşünmenin aynı bileşeni için farklı araştırmacıların eşanlamlı kelimeler (doğrulama ve ikna etme / doğrulama ve inandırma / ispatlama gibi) kullandıkları ve matematiksel düşünmede daha çok özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama bileşenlerin ön plana çıktığı görülmektedir. Hem bu nedenle hem de matematiksel düşünmenin tüm bileşenlerinin tek bir çalışma kapsamında ele alınmasının zorluğu göz önüne alınarak, bu çalışmada matematiksel düşünme sürecinin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamaları üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu aşamalar ve bu aşamaların özellikleri verilen kaynaklar temel alınarak aşağıda açıklanmıştır. Bu kabul,

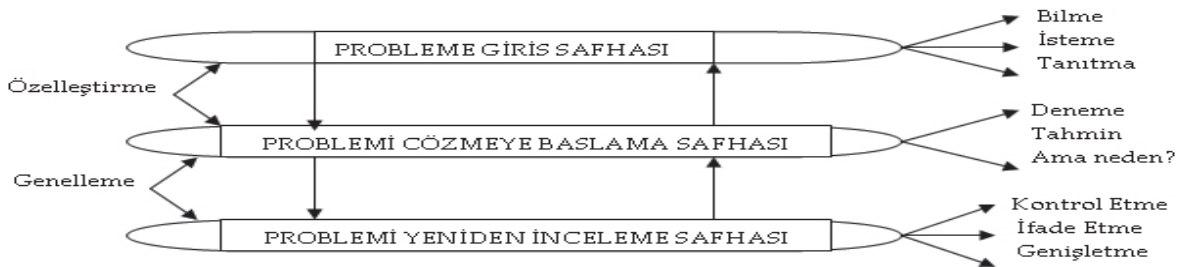
matematiksel düşünme sürecini daha çalışılabilir hale getirmeyi amaçlayıp diğer bileşenlerin reddedilmesi anlamına gelmemektedir. Aşağıdaki açıklamalardan daha iyi anlaşılacağı üzere, farklı araştırmacılar tarafından dile getirilen bazı bileşenler, bu çalışma kapsamındaki dört bileşenden birinin içine girebilmektedir. Örneğin, Liu (2003) tarafından dile getirilen “tahmin etme” bileşeni, özelleştirme ve varsayımda bulunma aşamalarında karşımıza çıkan bir bileşendir.

### Özelleştirme

Özelleştirme, bir genellemeye ulaşmayı sağlayacak kanıtları bir araya getirme işlemidir (Stacey, vd. 1985). Başka bir deyişle özelleştirme, örnekleri rastgele (problem durumunu anlamak için), sistematik bir şekilde (genellemeye zemin oluşturmak için) ve ustaca (genellemeyi test etmek için) seçme anlamındadır (Stacey, vd. 1985). Özel durumları rasgele seçmek, problemin ne içerdiğine dair bir fikir elde etmek ve bir durumun (ya da tahminin) doğru olup olmadığını görmek açısından iyi bir fikir olabilir. Fakat bir ilişki araştırılıyor ve başarı elde etmek isteniyorsa özel durumların sistematik olarak seçilmesi daha yararlıdır (Stacey, vd. 1985). Özelleştirmede bir veya daha fazla örnek verme, bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme veya bulma gibi eylemler söz konusudur. Ayrıca verilen herhangi bir durum için karşıt veya ilgili örnek bulma, istenilenleri doğru bularak sonucu farklı şekillerde yazma gibi eylemler de özelleştirmede yapılabilir.

### Genelleme

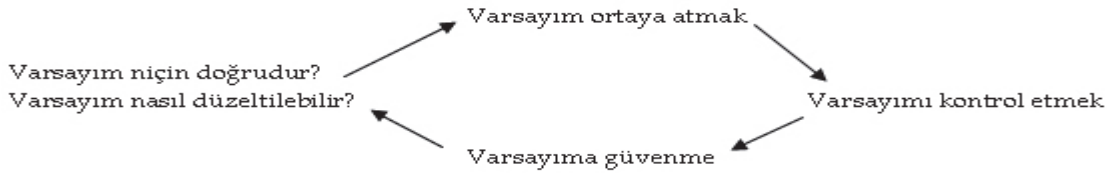
Genelleme, birkaç örnekten hareketle daha geniş olaylar kümesi hakkında tahminlerde bulunma (Stacey, vd. 1985; Tall, 2002) veya bazı temel ilişkilere ait sezgileri açık bir şekilde ifade etmeye çalışmak (Stacey, vd. 1985) şeklinde tanımlanmıştır. Matematiksel genellemelerde belli sayıdaki adımlardan hareketle iddia hakkında karar verilmeye çalışılır. Bu durum, genelleme sırasında özelleştirme işleminin de yapıldığını göstermektedir. Bu bileşen, matematik için hayati bir öneme sahiptir; çünkü spesifik sonuçlar yararlı olabilmesine rağmen, matematiksel sonuçlar karakteristik olarak geneldir. Genelleme, bizi “Doğru olması muhtemel görünen şey nedir?, Niçin ve nerede doğrudur?” sorularına götürür (Stacey, vd. 1985). Genelleme sırasında örüntü oluşturma, sınıflama, eşleştirme, sıralama ve karşılaştırma yapma, benzerlik ve farklılıkları belirleme, iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel veya sözel olarak ifade etme, olabilecek bütün ihtimalleri tanımlama gibi eylemler söz konusudur. Özelleştirme ve genelleme süreçleri Şekil 1’de (Hacısalihoglu, vd. 2003; Stacey, vd. 1985) verilmiştir.



Şekil 1. Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri

### Varsayımda Bulunma

Varsayım, mantıklı görünen ancak doğruluğu henüz kanıtlanmamış bir durumdur. Özelleştirme ve genelleme süreçlerinde kendiliğinden ortaya çıkan varsayımda bulunma ise, bir önermenin doğru olabileceğini tahmin ederek doğruluğunu araştırma sürecidir. Varsayımda bulunma sırasında sözel veya matematiksel olarak tahminde bulunma, matematiksel iddiaları formüle etme, önermelerden sonuç çıkarma, hipotez kurma ve test etme gibi eylemler söz konusudur. Stacey, vd. (1985) varsayımları ifade ve test etmenin, gerektiğinde değiştirmenin matematiksel düşünmenin bel kemiğini oluşturduğunu ifade etmiş ve varsayımda bulunmayı döngüsel bir süreçle göstermişlerdir.

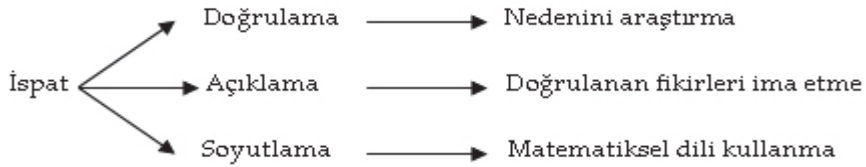


Şekil 2. Varsayımında Bulunma Döngüsü

Varsayımında bulunmaya başlandığında, varsayımların bazılarını kontrol altında tutmaya çalışmak ve döngüsel süreçte onlara güvenmek gerekir (Stacey, vd. 1985). Daha sonra ise varsayımın niçin doğru olduğuna veya varsayım yanlış ise onun nasıl düzeltileceğine bakılır. Eğer varsayım düzeltilemiyorsa yeni bir varsayım ortaya atılır. Bu şekilde döngüsel bir süreç takip edilir.

### İspatlama

Matematiğin öğrenilmesinde en önemli olan ispat (Knuth, 2002) matematiksel düşünme için de önemlidir. İspatlama sırasında, bir önermeyi açıklama, neden doğru veya yanlış olduğunu söyleme ve değişik mantıksal düşünme yollarını (tümevarımsal ve tümdengelimsel düşünme) ve ispat çeşitlerini seçme ve kullanma gibi eylemler söz konusudur. Şekil 3'te görüldüğü gibi matematiksel ispatlar doğrulama, açıklama ve soyutlama olmak üzere üç aşamada tamamlanır (Baki, 2008).



Şekil 3. İspatlama Süreci

Birinci aşamada iddianın doğruluğu araştırılır. Ancak genel olarak "Ne" sorusunu tahmin etmek kolayken "Neden" sorusu o kadar kolay değildir (Hacısalihoğlu, vd. 2003; Stacey, vd. 1985). İkinci aşamada, iddianın neden doğru olduğu açıklanır. Doğruladığımız fikirleri kendi kendimize ve daha önemlisi diğerlerine izah edebilmeliyiz. Bunlar tahminlerimizin doğru yönde gelişmesine ve yapılanmasına önemli katkı sağlar. Üçüncü aşamada ise, matematiksel dil kullanılarak ve genelleme koşulları kontrol edilerek en kısa yoldan soyutlama yapılır (Baki, 2008).

Yukarıda açıklamalardan matematiksel düşünmenin bir süreç olduğu ve bileşenlerinin birbirini takip eden aşamalar oldukları anlaşılmaktadır. Bu durum farklı araştırmalarda da göze çarpmaktadır (Alkan ve Bukova Güzel, 2005; Hacısalihoğlu, vd. 2003). Gerçekten de birey herhangi bir problem durumuyla karşı karşıya kaldığında öncelikle özel durumları inceledikten sonra genellemeler yapmakta ve ardından varsayımlar yaparak bu varsayımları ispatlama yoluna gitmektedir. Matematiksel düşünmenin yukarıda sayılan aşamalarının ortaya çıkışı ve sırası, süreci yaşayan bireye ve problem durumuna göre değişiklik gösterebilir. Aynı durum karşısında bir birey bütün aşamalardan geçerken, bir başka birey bazı aşamaları atlayarak bir sonraki aşamaya geçebilir.

Matematiksel düşünme becerisi, bir problemle uğraşma, deneyimler üzerinde düşünme ve tasarlanan bir problem sürecini çalışma gibi çeşitli aktiviteler sonucunda geliştirilebilir (Hacısalihoğlu, vd. 2003). Bundan dolayı, matematiksel düşünmenin en temel özelliği problem çözmedir. Problem çözmeye, öğrencilerin soyutlama, ifade etme, sembolleştirme, genelleme, ispatlama ve yeni sorular ortaya atma gibi genel matematiksel stratejiler konusunda deneyimler kazanmalarını sağlar (Busbridge ve Özçelik, 1997). Dolayısıyla problem çözmenin söz konusu olduğu her durumda matematiksel düşünme de gerçekleşmektedir (Yeşildere, 2006). Bu açıdan,

öğrencilerin matematiksel bir problemle uğraşırken nasıl düşündüklerini ve nasıl çıkarsamada bulduklarını anlamak, matematiksel düşünmenin bileşenleri hakkında ipucu verebilir. Bu nedenle, bu çalışmada problem çözme sürecine odaklanarak matematiksel düşünme süreci incelenmeye çalışılmıştır.

### Yöntem

Bu çalışmada, nitel araştırma yaklaşımı kullanılmıştır. Nitel araştırmalar, araştırma yapılan kişilerin sahip oldukları deneyimlerinden doğan anlamların sistematik olarak incelenebilmesinde tercih edilen bir yöntemdir (Ekiz, 2003). Nitel araştırmalarda araştırmacılar ise doğal ortamı gözlemlene ve irdeleme, araştırılan insanların meydana getirdiği anlamlar açısından olguyu anlamlaştırma ve yorumlama çabası içerisinde (Denzin ve Lincoln, 2000).

#### *Çalışma Grubu*

Bu çalışma, Trabzon'daki bir lisenin 11. sınıfında okuyan ve tamamen gönüllülük esasına dayanarak seçilen 10'u kız, 14'ü ise erkek 24 öğrenci ile yapılmıştır. Çalışma grubunun seçiminde amaçlı örnekleme yoluna gidilerek, amaca yönelik daha fazla ve detaylı veriler elde edilmeye çalışılmıştır. Amaçlı örneklemede araştırma konusu için önemli olduğu düşünülen kriterler belirlenmekte ve bu kriterlere göre seçilen çalışma grubunun, araştırma evrenini bütün nitelikleri ile temsil edebildiği düşünülmektedir (Tavşancıl ve Aslan, 2001). Uygulamanın yapıldığı okul ise, orta seviyeli öğrencilerden oluşan resmi bir devlet okulu olup rastgele seçilmiştir.

#### *Veri Toplama Araçları*

Bu araştırmada veriler, geliştirilen üç çalışma yaprağı ve uygulama sırasında yapılan yapılandırılmamış gözlemler yoluyla toplanmıştır. Çalışma yapraklarındaki sorular oluşturulurken Watson ve Mason (1998)'un matematiksel düşünmeyi harekete geçirici soru tipi olarak tanımladıkları soru örneklerinden ve Doğan (2008)'in "Matematik Yaramazdır" isimli kitabından yararlanılmıştır. Watson ve Mason (1998) matematiksel düşünmenin yukarıda tanıtılan farklı aşamalarında farklı soruların belirleyici olabileceğinin altını çizmişlerdir. Örneğin özelleştirmeye ilgili olarak bireyin "bir veya daha fazla örnek verme" ve "bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme, bulma" ve "...'e karşı bir örnek var mı?" vb. sorular sorulabileceğini ifade etmişlerdir. Genelleme ve varsayımda bulunmayla ilgili olarak "genelde ne olur?", "... gerçeği bazen mi, yoksa her zaman mı olur?", "... ile ilgili bütün ihtimalleri tanımla" ve "... doğru olması için neyin değişmesi veya aynı kalması gerekir?" vb. sorular uygunken, ispatlamayla ilgili olarak da "... nedenini açıkla", "...nasıl emin olabiliriz?", "... bana neyin yanlış olduğunu söyle" ve "... rolünü veya kullanımını açıkla" sorularından faydalanılabileceği ifade edilmektedir.

Hazırlanan çalışma yapraklarının her biri, dörder soru içeren iki etkinlik ve etkinlikler sonucunda elde edilen sonuçların birbiriyle ilişkilendirilmesini isteyen bir soru olmak üzere toplam dokuz sorudan oluşmaktadır. Anlaşılabilirliği kolaylaştırmak amacıyla, bu çalışmada sorular ÇnYm (n çalışma yaprağının, m de sorunun numarası) şeklinde kodlanmıştır. Örneğin, Ç1Y3 1. çalışma yaprağının 3. sorusunu ifade etmektedir. Çalışma yapraklarının birincisi (Ç1) doğrular, ikincisi (Ç2) çemberler ve üçüncüsü (Ç3) ise çokgenlerle ilgilidir. Çalışma yapraklarındaki etkinliklerin ilk soruları (yani çalışma yapraklarının 1. ve 5. soruları) özelleştirme; 2. ve 6. soruları genelleme; 3., 7. ve 9. soruları varsayımda bulunma ve 4. ile 8. soruları da ispatla ilgilidir. Bir yandan Watson ve Mason (1998)'un yukarıda tanıtılan sorularından yararlanılarak, diğer yandan matematik eğitiminde uzman bir akademisyenin ve iki matematik öğretmenin görüşleri neticesinde hazırlanan soruların aşamalara yönelik olduğu kanaatine varılmıştır. Ayrıca pilot çalışmanın sonunda öğrencilerin verdikleri cevaplar da bunu destekler niteliktedir. Son olarak, çalışma yapraklarıyla ilgili bu kişilerle yapılan tartışmalardan ve pilot çalışmadan sonra, soruların anlaşılır ve öğrencilerin seviyelerine uygun olduğu konusunda da ortak bir karara varılmıştır.

Örneğin, doğrularla ilgili çalışma yaprağında (Şekil 4), özelleştirmeye ilgili “bir veya daha fazla örnek verme” ve “bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme, bulma” soruları dikkate alınarak öğrencilere, Ç1Y1 ve Ç1Y5 soruları sorulmuştur. Genelleştirmeye ilgili olarak ise, “genelde ne olur?”, “...gerçeği bazen mi yoksa her zaman mı olur?” soruları göz önünde bulundurularak öğrencilerden Ç1Y2 ve Ç1Y6 sorularıyla ilgili düşündüklerini yazmaları istenmiştir. Varsayımda bulunmayla ilgili olarak da, “...ile ilgili bütün ihtimalleri tanımla” ve “...doğru olması için neyin değişmesi veya aynı kalması gerekir?” soruları paralelinde öğrencilere Ç1Y3, Ç1Y7 ve Ç1Y9 soruları sorulmuştur. Son olarak ispatlamayla ilgili olarak ise, “nedenini açıkla”, “nasıl emin olabiliriz?”, “...rolünü veya kullanımını açıkla” ve “...beni ikna et” soruları düşünülerek öğrencilere Ç1Y4 ve Ç1Y8 soruları sorulmuştur.

Grup Elemanları :  
Grup İsmi :



Doğrular en çok kaç noktada kesilir?  
Doğrular düzlemi en çok kaç bölgeye ayırır?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu sorulara cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıdaki etkinliklerde verilen sorulara cevap bulmaya çalışınız.

Doğrular	Doğru Sayısı	Kesişim Nokta Sayısı
	1	0
	2	1
	3	3
	4	6

#### 1. Etkinlik:

1.Yukarıdaki kesilen 3 doğrunun altına 6 kesişim noktası olacak şekilde birbirleriyle kesilen 4 doğru çiziniz.

2.Kesişim nokta sayılarının oluşturduğu örüntüyü matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz? Açıklayınız.

3.Kesişim nokta sayılarıyla ilgili matematiksel bir varsayımda bulunabilir misiniz? Açıklayınız.

4.Birbirleriyle kesilen n tane doğrunun kesişim nokta sayısı en çok kaçtır? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız / ispatlırsınız?

#### 2. Etkinlik:

5.Aşağıda bir ve iki tane doğrunun düzlemde oluşturduğu bölgelerin sayısı verilmektedir. Birinci etkiaktaki şekilleri dikkate alarak, üç ve dört tane doğrunun düzlemde oluşturdukları bölgelerin sayılarını bulunuz.

Doğru Sayısı	Bölge Sayısı
1	2
2	4
3	...
4	...

6.Bölge sayılarının oluşturduğu örüntüyü matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz? Açıklayınız.

7.Bölge sayılarıyla ilgili bir matematiksel bir varsayımda bulunabilir misiniz? Açıklayınız.

8.Birbirleriyle kesilen n tane doğru düzlemde en çok kaç tane bölge oluşturur? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız / ispatlırsınız?

9.Doğruların kesişim nokta sayısı ile bölge sayıları arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

Şekil 4.Doğrularla İlgili Çalışma Yaprığı (Ç1)

Gözlem, nitel araştırmaların en önemli ve en temel veri toplama araçlarından biridir. Bu nedenle araştırmada, matematiksel düşünme hakkında öğrencilerin doğal ortamdaki davranışlarını incelemek ve bu davranışları daha ayrıntılı bir şekilde resmetmek için gözlem de yapılmıştır.

#### Pilot Çalışma ve Veri Toplama Araçlarının Uygulanması

Geliştirilen çalışma yapraklarının uygulanabilirliğini test etmek için, 11. sınıf öğrencileriyle pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma sırasında, çalışma yapraklarında verilen kesişim nokta ve bölge sayılarından bazılarının yanlış verildiği belirlenmiş ve gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Çalışma yapraklarında başka değişiklik yapılmamıştır. Diğer yandan, pilot çalışma sayesinde hem soruların öğrenciler tarafından anlaşılabilirliği test edilmiş hem de cevaplama için gerekli süre belirlenmiştir. Asıl uygulama, aynı lisenin farklı bir 11. sınıfında yürütülmüş ve üç ders saati sürmüştür.

Öğrenciler, düşüncelerini en iyi grup çalışmasının bulunduğu sosyal bir ortamda yansıtmaktadır. Grup çalışması öğrencilere kendi kavramları hakkında konuşma, kendi stratejilerini kurma, varsayımda bulunma ve matematiksel bilgilerini tartışma gibi imkanlar sunmaktadır (Baki, 2008). Bu nedenle, öğrencilerin ikiyeşerli gruplar halinde çalışmaları uygun görülmüştür. Her bir araştırmacı altı grupta ilgilenmiş, gruplar arasında dolaşarak grup içindeki tartışmaları ve yapılanları takip edip rehberlik yapmışlardır. Ayrıca araştırmacılar, Watson ve Mason (1998)'un matematiksel düşünmeyi harekete geçirmek için belirledikleri soruları öğrencilere sorarak onların zihinsel süreçlerini anlamaya ve daha fazla veri toplamaya çalışmışlardır. Araştırmacıların gözlem sırasında öğrencilere sordukları sorulardan bazıları şu şekildedir: *Çizdiğin bu şekil soruda istenilenle ilgili bir örnek midir? Bulduğun sonucu matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsin? Bulduğun bu sonuç her zaman doğru mudur? Beni bu sonucun doğru olduğu konusunda nasıl ikna edersin? vb.*

#### *Verilerin Analizi*

Verilerin analizi aşamasında, öncelikle gruplar tarafından verilen cevaplar soru soru tablollaştırılmıştır. Ardından tablolardaki veriler, araştırmacılar tarafından defalarca okunmuş ve araştırmanın amacı dikkate alınarak taslak kodlar oluşturulmuştur. Aynı anlama gelecek cevaplar ortak bir kod altında toplanmıştır. İki araştırmacının uyuşmadığı kodlamalar üzerinde tartışılarak uyuşma sağlanmıştır. Tartışmalar sonucunda oluşturulan ortak kodlar tablolar halinde sunulmuştur. Gözlem verileri ise, öğrencilerin çalışma yapraklarına verdikleri cevapları yorumlamada kullanılmış ve gözlem sırasında sorulan sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplardan da faydalanılmıştır.

#### *Sınırlılıklar*

Bu çalışma, matematiksel düşünmeyle ilgili olarak azami derecede bilgi elde etmek amacıyla öğrencileri aşamalara yönlendirecek şekilde hazırlan çalışma yapraklarındaki sorularla sınırlıdır. Ayrıca, matematiksel düşünme süreçlerini karakterize eden temel özellikler göz önüne alınarak geliştirilmiş olan bu sorular, matematikteki tüm konulardan ziyade sınırlı sayıda konuyla ilişkilidir. Son olarak bu çalışma, Trabzon'da bulunan bir lisedeki 24 öğrenciden elde edilen verilerle sınırlıdır.

#### *Bulgular*

Bu bölümde, çalışma yapraklarındaki özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama bileşenleriyle ilgili kısımlardan ve gözlemlerden elde edilen bulgular sunulmuştur.

#### *Özelleştirme*

Çalışma yapraklarının 1. ve 5. soruları özelleştirmeye ilgilidir. Bu sorularda sırasıyla altı kesişim noktası olacak şekilde dört doğru çizilmesi (Ç1Y1), üç ve dört doğrunun düzlemde oluşturdukları bölge sayısının bulunması (Ç1Y5), 12 kesişim noktası olacak şekilde dört çember çizilmesi (Ç2Y1), üç ve dört çemberin düzlemde oluşturduğu bölge sayısının bulunması (Ç2Y5), altıgenin kenar sayısının ve bir köşesinden çizilen köşegenlerin üçgeni kaç bölgeye ayırdığı (Ç3Y1), beşgen ve altıgenin toplam köşegen sayılarının bulunması (Ç3Y5) istenmektedir.

Grupların özelleştirmeye ilgili olarak, istenilen özel bir durum için şekil çizdikleri (Kod 1), verilen özel bir durum için istenilenleri doğru veya kısmen doğru buldukları (Kod 2), özelleştirmeyi atladıkları (Kod 3) veya soruları cevaplayamadıkları belirlenmiştir. Aşağıda, özelleştirme için oluşturulan kodlar ve bu kodların bazıları için öğrenci cevaplarından örnekler verilmiştir.

Kod 1. Sistematik Bir Şekli Çizme: Bu kod, düzenli, planlı ve aralarında belli bir örüntü olan şekillerden birini çizmekle ilgili olup Ç1Y1 ve Ç2Y1 için anlamlıdır. Öğrenciler, bu kodla ilgili sorularda tam bir başarı sağlamışlardır.



Kod 2. Sistemik Bir Yol İzleme: Bu kod, sistemik bir yol izlenerek daha az sayıdaki özel durumdan başlayıp daha sonra istenilen özel durum için soruların yanıtlanmasından ibaret olup Ç1Y5, Ç2Y5, Ç3Y1 ve Ç3Y5 sorularıyla ilişkilidir. Cevaplar incelendiğinde, grupların istenilenleri doğru veya kısmen doğru buldukları fark edilmektedir. Bu durum Ç2Y5, Ç3Y5 ve Ç1Y5 soruları için aşağıdaki gibi örneklendirilmiştir.

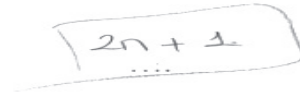
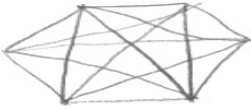
Çember Sayısı	Bölge Sayısı	Çokgen	Toplam Köşegen Sayısı
1	2,2	Üçgen	0
2	4,4	Dörtgen	2 → 0+2
3	8,6	Beşgen	5 → 0+2+3
4	14	Altıgen	9 → 0+2+3+4

Şekil 5a. Ç2Y5 sorusuna verilen bir doğru cevap

Şekil 5b. Ç3Y5 sorusuna verilen bir doğru cevap

Şekil 5a ve 5b'de görüldüğü gibi bu cevaplarda öğrencilerin sistemik bir yol izlediği ve verilen sayılar arasındaki ilişkiyi belirleyip verilmeyen sayıları doğru buldukları görülmektedir. Böylece her iki grup, bölge sayıları ve toplam köşegen sayılarını doğru bularak özelleştirmeyi başarıyla tamamlamışlardır.

Kod 3. Özelleştirme Aşamasını Atlama: Bu kod, özelleştirme aşamasını atlamaktan ibarettir. Bir grup biri altıgenin kenar sayısının ve köşegenin altıgeni ayırdığı üçgen sayısının istendiği Ç3Y1 sorusunda özelleştirme yapmak yerine, doğrudan varsayımda bulunarak özelleştirme aşamasını atlamıştır (Şekil 6).



Şekil 6. Ç3Y1 Sorusuna Bir Grubun Verdiği Cevap

Özelleştirmeyle ilgili sorular için oluşturulan kodların frekansları Tablo 1'de sunulmuştur. Bu tablo incelendiğinde, özelleştirme aşaması için gerekli işlemlerin grupların çoğu tarafından doğru yapıldığı görülmektedir. Bu ise, öğrencilerin özelleştirme aşamasında zorlanmadıklarını ortaya koymaktadır. Ayrıca yapılan gözlemler de, öğrencilerin özelleştirmeyle ilgili soruları çok kısa sürede yaptıklarını desteklemektedir. Ancak, çalışma yapraklarının özelleştirmeyle ilgili çizim gerektiren 1. sorularında bir sıkıntı olmamasına rağmen; çalışma yapraklarının 5. sorularında bazı grupların doğruların ve çemberlerin oluşturdukları bölge sayılarını ve çokgenlerin toplam köşegen sayılarını bulurken şekilleri dikkate almadan sayıların aritmetik olarak arttıklarını düşünerek soruları cevapladıkları görülmüştür. Bu şekilde yapan öğrenciler doğru, çember ve çokgenle ilgili şekilleri tekrar incelemeleri konusunda uyarılmış, neticede neredeyse tüm grupların doğru sonuca ulaşmıştır.

Tablo 1.

Özelleştirmeyle İlgili Kodların Frekansları

	Ç1Y1	Ç1Y5	Ç2Y1	Ç2Y5	Ç3Y1	Ç3Y5	Toplam
Kod 1	12		12				24
Kod 2		12		11	11	11	45
Kod 3					1		1
Cevapsız				1		1	2

### Genelleme

Bu bileşenle ilgili sorularda öğrencilerden, doğruların kesişim nokta sayılarının (Ç1Y2), doğruların oluşturduğu bölge sayılarının (Ç1Y6), çemberlerin kesişim nokta sayılarının (Ç2Y2), çemberlerin bölge sayılarının (Ç2Y6), çokgenlerin bir köşesinden çizilen köşegenlerle oluşan üçgen sayılarının (Ç3Y2) ve çokgenlerin bütün köşelerinden çizilen toplam köşegen sayılarının (Ç3Y6) oluşturduğu örüntüleri matematiksel olarak ifade etmeleri istenmektedir.

Grupların genelleme aşamasında, sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel (Kod 1) veya matematiksel ifadeler (Kod 2) kullanarak ifade ettikleri veya soruları cevapsız bıraktıkları belirlenmiştir. Bu kodlar aşağıda açıklanmış ve grup cevaplarından örnekler verilmiştir.

Kod 1. Sözel Genelleme: Bu kod, sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etmeyle ilgilidir. Ç2Y2 sorusuna verilen doğru ve yanlış cevaplardan biri aşağıdaki gibidir.

Çember sayısı arttıkça kesişim nokta sayısı arasındaki fark 2 ile olarak artar.

Matematikte darlık artar.

Şekil 7a. Ç2Y2 Sorusuna Verilen Doğru Bir Cevap

Şekil 7b. Ç2Y2 Sorusuna Verilen Yanlış Bir Cevap

Kod 2. Matematiksel Genelleme: Bu kod, sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmeyle ilgili olup bazı gruplardan tarafından doğru, bazıları tarafından da yanlış kullanılmıştır. Ç3Y6 sorusu için örnek cevaplar aşağıda verilmiştir:

Üçgen → 0  
 dörtgen → 0+2  
 beşgen → 0+2+3  
 altıgen → 0+2+3+4

$(k-3) + \frac{k}{2}$

Şekil 8a. Ç3Y6 Sorusuna Verilen Doğru Bir Cevap

Şekil 8b. Ç3Y6 Sorusuna Verilen Yanlış Bir Cevap

Genelleme aşamasıyla ilgili sorular için oluşturulan kodların frekansları Tablo 2'deki gibidir. Buna göre, Ç3Y6 sorusu hariç grupların çoğu sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyle ilgili soruları doğru yapmışlardır. Ayrıca grupların bu ilişkiyi daha çok sözel ifade etmeyi tercih ettikleri görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel sembollerle ifade etmede sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Yapılan gözlemler de bunu destekler niteliktedir. Çünkü gözlemler sırasında öğrencilerden buldukları genellemeleri matematiksel olarak ifade etmeleri istenildiğinde zorlandıkları belirlenmiştir. Ayrıca bazı öğrenciler sorularda geçen "örüntü" kavramını anlamamış ve bu konuda yardım istemişlerdir.

Tablo 2.

Genellemeyle İlgili Kodların Frekansları

	Ç1Y2	Ç1Y6	Ç2Y2	Ç2Y6	Ç3Y2	Ç3Y6	Toplam
Kod 1	10	8	11	9	11	2	51
Kod 2	1	3		2		7	13
Cevapsız	1	1	1	1	1	3	8

### Varsayımda Bulunma

Bu aşamada yer alan sorularda öğrencilerden doğruların oluşturduğu kesişim nokta sayıları (Ç1Y3) ve bölge sayıları (Ç1Y7), çemberlerin oluşturduğu kesişim nokta sayıları (Ç2Y3) ve bölge sayıları (Ç2Y7), çokgenlerin oluşturduğu üçgen sayıları (Ç3Y3) ve toplam köşegen sayıları (Ç3Y7), doğruların (Ç1Y9) ve çemberlerin (Ç2Y9) kesişim nokta sayılarıyla bölge sayıları arasındaki ilişkiyle ve bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegenlerin oluşturduğu üçgen sayısıyla bu çokgenin toplam köşegen sayıları arasındaki ilişkinin (Ç3Y9) matematiksel olarak ifade edilmesi istenmektedir.

Öğrencilerin, sözel (Kod 1) veya matematiksel (Kod 2) varsayımda buldukları veya soruları cevapsız bıraktıkları belirlenmiştir:

Kod 1. Sözel Varsayım: Varsayımları sözel olarak ifade etmeyle ilgili olan bu koda bağlı olarak, grupların doğru veya yanlış bir şekilde varsayımda buldukları belirlenmiştir. Örneğin, doğruların oluşturduğu kesişim nokta sayıları arasındaki ilişkiyle ilgili varsayımda bulunmalarının istenildiği Ç1Y3 sorusuna verilen cevapların ikisi aşağıdaki gibidir:

*n tane doğrunun kesişim noktası n doğru sayısı ile çarpımın yarısı kesişim nokta sayısını verir.*

*3 doğru parçasında 3'erli olarak 3'erli.*

Şekil 9a. Ç1Y3 Sorusuna Verilen Doğru Bir Cevap

Şekil 9b. Ç1Y3 Sorusuna Verilen Yanlış Bir Cevap

Kod 2. Matematiksel Varsayım: Bu kod, varsayımları matematiksel olarak ifade etmeyle ilişkilidir. Bu koda bağlı cevaplar incelendiğinde, grupların matematiksel olarak doğru veya yanlış bir şekilde varsayımda buldukları belirlenmiştir. Bununla ilgili olarak, öğrencilerden çemberlerin oluşturduğu kesişim nokta sayıları arasındaki ilişkiyle ilgili matematiksel bir varsayımda bulunmalarının istenildiği Ç2Y3 sorusuna verilen cevapların ikisi aşağıda verilmiştir.

*$n^2 = n$  formülü ile bulunur.*

*$2 + \sum_{k=1}^n 2k = 2 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2 + n^2 + n = n^2 + n + 2$*

Şekil 10a. Ç2Y3 Sorusuna Verilen Doğru Bir Cevap

Şekil 10b. Ç2Y3 Sorusuna Verilen Yanlış Bir Cevap

Varsayımda bulunmayla ilgili sorular için oluşturulan kodların frekansları Tablo 3'te sunulmuştur:

Tablo 3.

Varsayımda Bulunmayla İlgili Kodların Frekansları

	Ç1Y3	Ç1Y7	Ç2Y3	Ç2Y7	Ç3Y3	Ç3Y7	Ç1Y9	Ç2Y9	Ç3Y9	Toplam
Kod 1	5	5	5	3	10	5	8	10	2	53
Kod 2	5	6	6	6		4	1		1	29
Cevapsız	2	1	1	3	2	3	3	2	9	26

Grupların, genellemede olduğu gibi sözel ya da matematiksel olarak varsayımda buldukları; ancak daha çok sözel varsayımda bulunmayı tercih ettikleri görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin matematiksel olarak varsayımda bulunmada sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Ayrıca yapılan gözlemlerde varsayımda bulunmayla ilgili çalışma yapraklarındaki özellikle 9. soruda birçok grubun zorlandığı görülmüştür. Öğrencilere soruyu yapamama nedenleri sorulduğunda "Hocam bir ilişki bulamıyorum" demişlerdir.

### İspatlama

Çalışma yapraklarının 4. ve 8. soruları ispatlamayla ilgilidir. Bu bağlamda Ç1Y4 ve Ç1Y8'de sırasıyla "birbiriyle kesişen n tane doğrunun kesişim nokta sayısı" ile "bölge sayılarının"; Ç2Y4 ve Ç2Y8'de ise "birbiriyle kesişen n tane çemberin kesişim nokta sayısı" ile "bölge sayılarının" en çok kaç olacağını bulunması ve ispatlanması istenmektedir. Ayrıca Ç3Y4'te, n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegenlerin bu çokgeni en çok kaç üçgene ayıracağı ve Ç3Y8'de n kenarlı bir çokgenin toplam köşegen sayısı sorularak ve ispat istenmiştir.

Öğrencilerin bu bileşenle ilgili olarak, doğru bir şekilde ifade edilmiş matematiksel ifadeyi aritmetik (Kod 1), cebirsel (Kod 2), geometrik (Kod 3) şekilde ispatladıkları veya hiçbir şey yapamadıkları belirlenmiştir. Her ispatın cebirsel bir parçası vardır; ancak ek olarak aritmetik veya geometrik öğeler ispatta kullanılınca farklı kodlar oluşabilmektedir. Aşağıda bu açıklama doğrultusunda ispatlama için oluşturulan kodlar ve grup cevaplarından örnekler verilmiştir.

Kod 1. Aritmetik İspat: Bu kod, bulunan matematiksel ifadeyi değişkene değer vererek ispatlamayla ilgilidir. Örneğin, Ç1Y4 sorusuna bir grubun verdiği cevap aşağıdaki gibidir. Şekil 13 incelendiğinde, öğrencilerin aritmetik ispat yaparken matematiksel düşünmenin özelleştirme bileşenini kullandıkları görülmektedir.

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} =$$

Doğru sayıyı n ise  
 $n=1$  kesim sayısı  
 $\frac{1 \cdot 0}{2} = 0$  kesim sayısı  
 $n=2$   
 $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$  kesim sayısı

Şekil 11. Ç1Y4 Sorusuna Bir Grubun Verdiği Cevap

Kod 2. Cebirsel İspat: Bu kod yalnız Ç2Y4 ve Ç2Y5 için anlamlı olup, değişkene değer vermeden matematiksel geçerliğe sahip bir yolla matematiksel ifadenin ispatlanması söz konusudur. Bu kodla ilgili olarak, Ç2Y8 sorusuna verilen bir cevap aşağıdaki gibidir.

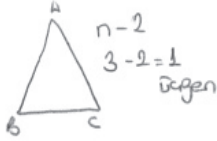
$$n^2 = n + 2$$

$$2 + (2 + 4 + 6 + \dots + 2n - 2)$$

$n(n-1) + 2$

Şekil 12. Ç2Y8 Sorusuna Bir Grubun Verdiği Cevap

Kod 3. Geometrik İspat: Bu kod, ispatı yapmak için geometrik şekillerden faydalanmaktan ibarettir. Bir grubun Ç3Y4 ve Ç3Y8 sorularına verdiği cevaplar aşağıdaki gibi örneklendirilmiştir.



Şekil 13a. Ç3Y4 Sorusuna Bir Grubun Verdiği Cevap



$(n-2)$   
 $n-2=3$  üçgen



Şekil 13b. Ç3Y8 Sorusuna Bir Grubun Verdiği Cevap

Şekil 15a incelendiğinde, Ç3Y4 sorusu için, bir grubun üçgen ve beşgen çizdiği ve bu çokgenleri bir köşesinden üçgenlere ayırarak ispat yapmaya çalıştığı görülmektedir. Ayrıca aynı grubun, n kenarlı bir çokgenin toplam köşegen sayısının sorulduğu Ç3Y8 için dörtgen ve beşgen çizdiği ve bu çokgenleri bütün köşelerinden üçgenlere ayırarak ispat yapmaya çalıştığı belirlenmiştir.

İspatlamayla ilgili sorular için oluşturulan kodların frekansları Tablo 4'te sunulmuştur. Tablo, grupların ifade ettikleri varsayımları aritmetik olarak ispatlama eğiliminde olduklarını, cebirsel ve geometrik ispatlarda, aritmetik ispattaki kadar başarılı olmadıklarını göstermektedir. Gözlemlerde ise bazı öğrencilerin 4. ve 8. sorularda değişkenlere değer vererek ispat yapmaya çalıştıkları görülmüş ve bu durumu "Biz derste böyle de ispat yaptık" şeklinde savunmuşlardır.

Tablo 4.

İspatlamayla İlgili Kodların Frekansları

	Ç1Y4	Ç1Y8	Ç2Y4	Ç2Y5	Ç3Y4	Ç3Y8	Toplam
Kod 1	8	4	5		6	3	26
Kod 2			6	5			11
Kod 3	3	5		3	4	2	17
Cevapsız	1	3	1	4	2	7	16

### Tartışma

Gruplardaki öğrencilerin özelleştirmeyle ilgili soruların çoğunu doğru yapmaları, özelleştirmede fazla sıkıntı çekmediklerini göstermektedir. İlköğretim ve ortaöğretimde işlemsel becerilerin kazanılmasını ve pekiştirilmesini amaçlayan özel durum sorularına ağırlık verilmesinin bunda etkili olduğu düşünülmektedir. Grupların genellemeyle ilgili olarak, sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi daha çok sözel olarak ifade etmeyi tercih etmeleri ve bu ilişkiyi matematiksel sembollerle ifade etmede zorlandıklarını görülmektedir. Öğrencilerin bu konuda sıkıntı yaşamaları Özmentar, Bingölbali ve Akkoç (2008) ile Tall (2008)'un çalışmalarıyla paralellik göstermektedir.

Varsayımda bulunmayla ilgili olarak, grupların çoğunun varsayımlarını sözel şekilde ifade ettikleri görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin varsayımda bulunma konusunda yeterli olmadıklarını göstermektedir. Oysaki ilköğretim ve ortaöğretimdeki öğrencilerden, varsayım ve iddia oluşturabilmeleri ve onları değerlendirebilmeleri, matematiksel iddiaları formüle ederek tümdengelimli ve tümevarımsal muhakemeyi kullanabilmeleri, muhakeme becerilerini geliştirmeleri ve sürdürmeleri beklenmektedir (Altıparmak ve Öziş, 2005). İspatlamayla ilgili olarak da, grupların oluşturdukları varsayımlarını daha çok aritmetik (değişkene değer vererek) ya da geometrik olarak ispat etme girişiminde oldukları görülmüştür. Bu husus, öğrencilerin doğrulama sürecinde varsayımın niçin doğru olduğunu araştırmak yerine, değişkene değer vererek veya istenilen durum için şekil çizerek özelleştirme yapmaya çalıştıklarını göstermektedir. Ortaöğretimde varsayımda bulunma ve ispatlama gibi matematiksel düşünme becerilerine fazla yer verilmediğinden bu sonuç hiç de şaşırtıcı değildir. Bu durum Morali vd., (2006) ile Özer ve Arıkan (2002)'in çalışmalarıyla uyum içindedir.

Bulgular genel olarak ele alındığında, öğrencilerin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlamayla ilgili soruların sırasıyla %94.4, %80.6, %61.1 ve %15.3'ünü tam olarak doğru yaptıkları belirlenmiştir. Bu durum, matematiksel düşünmenin özelleştirme aşamasından ispatlama aşamasına doğru gidildikçe başarının düştüğünü göstermektedir. Bu düşünüşe liselerde, varsayımda bulunma ve ispatlama gibi matematiksel düşünme becerilerine yeterince önem verilmemesinin etkili olduğu söylenebilir (Morali vd., 2006; Özer ve Arıkan, 2002). Diğer yandan, bulgular öğrencilerin zaman zaman bazı aşamaları atladıklarını ve bir aşamanın içerisinde de bir başka aşamaya başvurduklarını da ortaya koymuştur. Bu ise, matematiksel düşünmenin ardışık aşamaları arasında gelgitler olabileceğini göstermektedir.

### Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarındaki yaşantılarını belirlemek amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda varılan sonuçlar ve bu sonuçlara bağlı olarak sunulan öneriler aşağıdaki gibidir:

- Matematiksel düşünme sürecinde, bir aşamadan bir sonrakine geçerken öğrenci başarısının düştüğü görülmüştür. Bu nedenle, matematiksel düşünmenin varsayımda bulunma ve ispatlama gibi aşamalarına okullarda daha fazla önem verilmesi ve ders kitaplarına özellikle bu aşamalarla ilgili etkinliklerin konulması önerilmektedir.

- Öğrenciler özelleştirmeyle ilgili soruların hemen hemen hepsini doğru cevaplamış ve özelleştirmede iyi bir performans sergilemişlerdir. Bu durumda öğrencilerimizin özelleştirmeyle ilgili sorunlarının olmadığı ve özelleştirmede yeterli oldukları söylenebilir. Bu durumun oluşmasında okullarda daha çok işlemsel sorulara ağırlık verilmesinin etkili olduğu düşünülmektedir.

- Genelleme sürecinde öğrencilerin sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi daha çok sözel olarak ifade etme eğiliminde oldukları, sorularda matematiksel bir dil kullanmaları istendiği halde bundan sakındıkları tespit edilmiştir. Benzer sonuç, varsayımda bulunmada da ortaya

çıkıştır. Bu durum, öğrencilerin varsayımda bulunmada yetersiz olduklarını göstermektedir. Bu nedenle, öğretmenlerin derslerinde değişkenler arasındaki ilişkileri matematiksel olarak ifadeye daha çok yer vermeleri, öğrencilerin sorularla alakalı varsayım/hipotez kurmalarını ve test etmelerini desteklemeleri ve düşündüklerini ifade etmede öğrencilere yardımcı olmaları önerilmektedir.

- İspatlamayla ilgili birçok sorunun boş bırakılması, öğrencilerin bu bileşende matematiksel düşünmenin diğer bileşenlerine göre daha fazla sıkıntı çektiklerini göstermektedir. İspatla ilgili sorulara cevap vermeye çalışan öğrencilerin de daha ziyade matematiksel olarak yeterli olmayan yollar izledikleri (özelikleştirme yaptıkları) ortaya çıkmıştır. İspatlamayla ilgili becerilerin gelişmesi için, öğretmen bir teoremin ispatı veya bir problemin çözümü sırasında sesli düşünmeli ve kelimelerini matematik terminolojisinden seçmelidir. Öğretmen matematiksel düşünmenin önemi üzerinde durmalı, mantıksal çıkarım yollarını ve alternatif çözüm yollarını öğrencileri ile birlikte tartışmalı ve sadece öğretmenin matematiğini ve çözümlerini tekrar etme mahiyetinde olan ödevlerden sakınmalıdır (Baki, 2008). Bu nedenlerden dolayı, öğrencilerin matematiği ve matematiksel düşünmeyi daha iyi anlamalarına yardımcı olmak için öğretmenlerin derslerde öğrencileri için geniş öğrenme yelpazesi sunmaları ve değişik ispat yöntemlerini kullanmaları tavsiye edilmektedir.

- Çalışma yapraklarının uygulanması sırasında yapılan gözlemlerde, öğrencilerin soruları bazen tek başlarına çözmeye çalıştıkları görülse de genel olarak yalnız çözemediklerinden grup çalışmasına daha fazla önem verdikleri ve böylece soruları daha kolay çözdükleri gözlenmiştir. Bu nedenle, matematiksel düşünmeyi geliştirmek için tasarlanan etkinliklerde grup çalışmasının kullanılması önerilmektedir.

- Bu çalışmadan elde edilen verilerin doğrular, çemberler ve çokgenlerle ilgili hazırlanan çalışma yapraklarıyla ve sınıf içinde yapılan gözlemlerle sınırlı olduğundan, benzer çalışmaların farklı örneklemeler ve matematiğin diğer konuları için de yapılması ve verilerin klinik mülakatlarla desteklenmesi önerilmektedir. Sonuç olarak, yukarıda belirtilen tüm hususlar göz önüne alınarak, ilköğretimden üniversite düzeyine kadar öğrencilerde matematiksel düşünmenin tüm bileşenlerini ortaya çıkaracak ve geliştirecek materyallerin hazırlanması, uygulanması ve sonuçlarının bu ve diğer araştırmaların sonuçlarıyla karşılaştırılması önerilmektedir.

#### Kaynakça

- Alkan, H. ve Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(3), 221-236.
- Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.
- Baki, A., Güven, B. ve Karataş, İ. (2002, Eylül). *Dinamik geometri yazılımı cabri ile keşfederek öğrenme*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Blitzer, R. (2003). *Thinking mathematically*. New Jersey: Prentice Hall.
- Busbridge, J. ve Özçelik, D. A. (1997). *İlköğretim matematik öğretimi*. YÖK/DÜNYA Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi, Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi, Ankara: Ajans-Türk Basın ve Basım A.Ş.
- Denzin, N. ve Lincoln, Y. (2000). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks: Sage.
- Doğan, A. (2008). *Matematik yaramazdır*. İstanbul: Ege Basım ve Matbaacılık.
- Ekiz, D. (2003). *Eğitim araştırma yöntem ve metotlarına giriş*. Ankara: Anı Yayıncılık.

- Hacısalihoğlu, H., Mirasyedioğlu, Ş. ve Akpınar, A. (2003). *Matematik öğretimi: Matematikte yapılandırıcı öğrenme ve öğretme*. Ankara: Asil Yayın Dağıtım.
- Henderson, P. B., Marion, B. Fritz, S. J., Riedesel, C., Hamer, J., Scharf, C., et al. (2004). *Materials development in support of mathematical thinking*. {ONLINE} <http://www.cs.geneseo.edu/~baldwin/math-thinking/iticse2002-paper.pdf> adresinden 10.01.2008 tarihinde indirilmiştir.
- Knuth, E. J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490.
- Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?. *The Mathematics Teacher*, 96(6), 416-421.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- Özer, Ö. ve Arkan, A. (2002, Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapma düzeyleri*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Özmantar, M. F., Bingölbali, E. ve Akkoç, H. (2008). *Matematiksel kavram yanlışları ve çözüm önerileri*. Ankara: Pegem Yayıncılık.
- Stacey, K., Burton, L. ve Mason, J. (1985). *Thinking mathematically*. England: Addison-Wesley Publishers.
- Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (2008). *The historical and individual development of mathematical thinking: Ideas that are set-before and met-before*. Plenary presented at Colóquio de História e Tecnologia no Ensino Da Matemática, UFRJ, Brazil.
- Tavşancıl, E. ve Aslan, E. (2001). *İçerik analizi ve uygulama örnekleri*. İstanbul: Epsilon Yayıncılık.
- Tural, H. (2005). "İlköğretim matematik öğretiminde oyun ve etkinliklerle öğretimin erişimi ve tutuma etkisi." Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Watson, A. ve Mason, J. (1998). Questions and prompts for mathematical thinking. *Association of Teachers of Mathematics*.
- Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.