Eğitim ve Bilim
2014, Cilt 39, Sayı 171

Education and Science
2014, Vol. 39, No 171

9. Sınıf Öğrencilerinin Rasyonel Sayılar Kümesinin Yoğunluğunu Anlama Düzeyleri

9th Grade Students' Understanding Levels of Density in the Set of Rational Numbers

Meral CANSIZ AKTAŞ[1]
Ordu Üniversitesi

Zeki APAYDIN[2]
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Devrim Yaşar AKTAŞ[3]
Fatih Anadolu Lisesi

Öz

Bu çalışmanın amacı, 9. Sınıf öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğu ile ilgili anlamalarını belirlemektir. Araştırmanın katılımcıları Ordu ilindeki bir lisede öğrenim görmekte olan 25 dokuzuncu sınıf öğrencisidir. Veriler Vamvakoussi ve Vosniadou'nun (2004) soru seti üzerinde klinik mülakatlar yapılarak toplanmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin çoğunluğu için, doğal sayılar kümesi ile ilgili ön bilgilerin, rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlamada engel teşkil ettiği anlaşılmıştır. Bunun yanında öğrencilerde verilen bir aralıkta yer alan sayıların, aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olması gerektiği yönünde görüşlerin hâkim olduğu belirlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: rasyonel sayılar, yoğunluk, kavramsal değişim.

Abstract

The aim of this study is to determine 9th grade students' understanding of density in the set of rational numbers. The participants of this study are twenty five 9th grade students who are studying at a high school in the city of Ordu. Data were collected by conducting clinical interviews with the question set which had been presented by Vamvakoussi and Vosniadou (2004). As a result of the research, it was understood that for the majority of students, prior knowledge of the natural numbers was an obstacle in understanding the density of the set of rational numbers. In addition, it was determined that the idea of the numbers in a given interval should be in the same representation with the endpoints of the interval was dominant for the students.

Key Words: rational numbers, density, conceptual change.

[1] Yrd Doç. Dr. Meral CANSIZ AKTAŞ, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, cansizmeral@hotmail.com
[2] Yrd. Doç. Dr. Zeki APAYDIN, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, zapaydin@gmail.com
[3] Devrim Yaşar AKTAŞ, Ordu Fatih Anadolu Lisesi, dinardya@hotmail.com

Summary

Purpose

The set of rational numbers includes the set of natural numbers but the two sets have different properties. Rational numbers are densely ordered, it means that between any two rational numbers, there is always an intermediate one, and, therefore, infinitely many other ones. However the set of natural numbers is discrete, that is the inequality $a<b<a+1$ fails where a, b natural numbers. So there are finite (there is no if they are sequential) natural numbers between two natural numbers Vamvakoussi and Vosniadou (2010). But the studies show that the students in primary, secondary and also high school levels think that set of rational and real numbers are discrete as well as natural numbers, and this is an obstacle to understand the density of the set of rational numbers (Aktaş and Cansız-Aktaş, 2012; Malara, 2001; Merenluoto and Lehtinen, 2004). As a result of the review of the literature, it's determined that the studies particularly related to the density of rational numbers were not performed adequately in Turkey. In this context the aim of the present study is to determine the students' understanding of the density in the set of rational numbers.

Methods

In this study, case study, which is one of the descriptive research methods, was used. The research was conducted in Ordu city, in the academic year of 2011-2012, at a school where the third researcher's lessons were being conducted. The sample consisted of 25 ninth grade students. The data were collected with a set of questionnaires of Vamvakoussi and Vosniadou (2004) specifying how many numbers there are in a given interval by conducting clinical interviews. For the data analysis, the coding within the general framework was used (Strauss and Corbin, 1990).

Findings

The answers given by the students were evaluated by the following categories obtained from the development of categories presented by Vamvakoussi and Vosniadou (2004).

Table 1.
Categories of Students' Responses

Categories of responses	0,001-0,01	3/8-5/8	0,005-0,006	5/8-8,5	2/5-4/7
Level 0	Examples which are not in the given interval				
Discreteness Level 1	Finite number of numbers > 0	Only one	No other	_	_
Discreteness Level 2	Finite number of numbers > 0	Only one	Finite number of numbers > 0	_	_
Discreteness Level 3	Finite number of numbers > 0	Finite number of numbers > 1	Finite number of numbers > 0	_	_
Discreteness - Density	The "infinitely many" answer appears in some, but not in all cases.				
Density Level 1	Infinitely many	Infinitely many	Infinitely many	Infinitely many (Need to turn the one into the other's form)	Infinitely many (Need to make them similar)
Density Level 2	Infinitely many	Infinitely many	Infinitely many	Infinitely many (No need to turn the one into the other's form)	Infinitely many (No need to make them similar)

Results

In the process of data analysis, it was pointed out that while deciding the numbers in the given intervals the students had used expressions that could be divided into two different groups. Therefore, the data analyses were performed separately for the two groups described below:

- Group 1: The students who considered that the type of the intermediate numbers in the interval is the same as the endpoints of the interval.
  Group 1a: Those who commented on the given representation
  Group 1b: Those who commented after the “turn into” process

- Group 2: The students who considered that the type of the intermediate numbers in the interval is independent from the endpoints of the interval.

Table 2.
Distribution of Students in the Levels

Categories of levels		Group 1		Group 2
		Group 1a	Group 1b	
Level 0		S9,S12,S18	S5	
Discreteness	Level 1	S6-S8-S14-S16-S19-S21-S24	S4-S10-S15	
	Level 2	S11-S22		
	Level 3	S25		
Discreteness-Density		S17-S20		
Density	Level 1	S7	S1-S23	
	Level 2			S2-S3-S13

The findings of the study indicate that the majority of students (88%) are in Group 1. It means the students considered that the type of the numbers between two rational numbers should have been the same as the endpoints of the interval. When we look at the distribution of the students in Group 1, it’s understood that almost half of the students (43.8%) in this group are in the level of “Discreteness level 1”. As it was seen, the students in these levels answer questions by considering rational numbers being successive like natural numbers. On the other hand, the findings show that students may regard fractions and decimals as different kinds of numbers not as different representations of the same number. For example it’s determined that the students in Group 1a had considered fractions and decimal as different kinds of numbers not as different representations of the rational numbers which can be converted to each other. The answers of the students in Group 1b are thought to be more interesting because although these students knew that fractions and decimals could be turned into each other, and explained their ideas after changing the endpoints of the interval with their preferred notations, they said there were only numbers expressed in the same notation with the endpoints of the interval.

Conclusions

As a result of the research, it was shown that for the majority of students, prior knowledge of the natural numbers was an obstacle in understanding the density in the set of rational numbers. In addition, it was determined that the idea of “the numbers in the interval should be in the same representation with the endpoints of the interval” was dominant for the students. This also showed that students perceived the set of rational numbers as a union of sets that were not associated with each other. The teachers who plan the teaching process have essential responsibilities in order to overcome these shortcomings. In addition, instructional materials prepared in connection with this subject should have activities to eliminate such misconceptions. As a result of studying on a small sample, the results could not be generalized. Therefore, researchers in this area are suggested that they should choose students with different levels and study on larger samples.

Giriş

Bütün bilim dallarının gelişmesinde kaçınılmaz bir şekilde kullanılan matematik en basit tanımı ile bir kimsenin, öğrenme sürecinde algılanmaya başlanan ilk kavramlardan olan sayılarla uğraşmasıdır (Balcı, 2008). Yani bireyin matematik ile ilişkisinin ilk olarak sayı kavramı ile başladığını söyleyebiliriz. Daha okula başlamadan ailesi, çevresi aracılığı ile sadece saymayla sınırlı işlevi ile sayılarla (doğal sayılarla) tanışmaya başlayan çocuk sonraki yıllarda farklı sayı kümelerini tanıyarak bu kavramla ilişkilerini geliştirmek durumunda kalmaktadır (Baştürk ve Dönmez, 2008). Bu süreçte tamsayı, rasyonel sayı, irrasyonel sayı, reel sayı kavramlarıyla karşılaşmaktadır. Rasyonel sayılar doğal sayıların ve tamsayıların özellikleri ile ilişkilendirilebilmelerine rağmen, daha farklı ve karmaşık özellikler içermektedir. Bu farklılık ve karmaşıklık da beraberinde bazı zorlukları getirmektedir (Durmuş, 2005; Moss, 2005; Ni ve Zhou, 2005, Vamvakoussi ve Vosniadou, 2010). Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) tarafından okutulan ders kitabında rasyonel sayı "a,b tamsayı $b \neq 0$ ve aralarında asal olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçimindeki sayılara rasyonel sayılar denir" şeklinde tanımlanmaktadır (MEB, 2007: 174). Ayrıca her rasyonel sayının bir devirli ondalık açılımı vardır. Rasyonel sayılar kümesi doğal sayılar kümesini içermektedir ancak bu iki küme birbirinden farklı özelliklere sahiptir. Rasyonel sayılar kümesi yoğundur. Bu, birbirinden farklı herhangi iki rasyonel sayı arasında daima başka rasyonel sayı (sonsuz tane) bulunur anlamına gelmektedir. Buna karşılık doğal sayılar kümesi ayrıktır yani a ve b doğal sayı olmak üzere $a<b<a+1$ olamaz. Bu nedenle, herhangi iki doğal sayı arasında sonlu tane (ardışık olmaları durumunda 0 tane) doğal sayı vardır. Yapılan çalışmalarda öğrenciler için rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunun anlaşılmasının güç olduğu ortaya koyulmuştur (Aktaş ve Cansız-Aktaş, 2012; Hannula, Pehkonen, Maijala ve Soro, 2006; Giannakoulias, Souyoul ve Zachariades, 2007; Merenluoto ve Lehtinen, 2002; Vamvakoussi ve Vosniadou, 2010; Vamvakoussi ve diğerleri, 2011).

Bir öğrencinin rasyonel sayılar kümesinin yapısını anlayabilmesi için, ayrıklığın doğal sayılar kümesine ait bir özellik olduğunu ve rasyonel sayılar kümesinde bu özelliğin korunmadığını ayrıca rasyonel sayıların kesir veya ondalık kesir gösterimleri olduğunu kavraması gerekir (Vamvakoussi ve Vosniadou, 2007). Ancak yapılan çalışmalar, ilköğretim ve ortaöğretim düzeyinde ve hatta yüksek öğretim düzeyindeki öğrencilerin, doğal sayılar kümesine ait olan bu ayrıklık özelliğini rasyonel sayılara ve reel sayılara genişlettiklerini ve bunun rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlamada önemli bir engel olduğunu göstermiştir (Aktaş ve Cansız-Aktaş, 2012; Malara, 2001; Merenluoto ve Lehtinen, 2004). Bir kavramın bireyin zihninde oluşması için o kavramın öğretmen tarafından sunulması yeterli değildir. Kavramlar bireyin bulunduğu sosyal ortam içerisinde etkileşimde bulunmasına veya etraflarında meydana gelen olayları yorumlamalarına bağlı olarak da oluşabilmektedir. Bu süreç bazen öğrencilerin kavramları yanlış yapılandırmaları ile sonuçlanabilmekte ve oluşan kavram yanılgıları öğrencilerin sonraki öğrenmelerini olumsuz olarak etkileyebilmektedir. Bu kavram yanılgılarının giderilmesinin yolu, mevcut bilgilerin gözden geçirilmesi ve bilimsel olarak doğru kabul edilmeyen bilgilerin doğrularıyla değiştirilmesinden geçer ki bu süreç kavramsal değişim sürecidir (Chi ve Roscoe, 2002).

Bir kavramın başka bir kavrama dönüşürken nasıl bir değişime uğradığı sorusu ile ilgili olarak kavramsal değişim yaklaşımında kavramsal değişimin önceden var olan bilgiyle başladığı açıklaması yapılmaktadır (Oğuz, 2007). Bu yaklaşımın öncülerinden olan Posner ve diğerleri (1982: 212) "Bazen öğrenciler, yeni olgularla başa çıkmak için var olan kavramları kullanırlar. Kavramsal değişimin bu ilk aşamasına özümseme denir. Ancak çoğu zaman öğrencinin yeni olguları başarılı bir şekilde yakalamasında, bu var olan kavramlar yetersiz kalır. Dolayısıyla öğrenci var olan kavramını değiştirmek ya da düzenlemek zorundadır. Kavramsal değişimim daha radikal olan bu aşamasına uyum denir" açıklamasını kullanmışlardır. Bu teori Piaget'in öğrenme teorisi ile Kuhn'un bilimsel devrim (scientific revolution) tanımlamaları üzerine kuruludur. Birey, eğer mevcut kavramları işlev görüyor ve karşılaştığı problemleri var olan kavram şeması ile çözülebiliyorsa, o kavramı değiştirme gereği hissetmez ancak eğer yeni bilgi, bireyin sahip olduğu önceki bilgilerle uyumlu değilse bilişsel bir çatışma yaşanır. Bu onu şemanın temel taşları üzerinde değişiklik yaparak yeni bir şema oluşturmaya yöneltir. İşte burada kavramsal değişim söz konusudur. Sahip olunan ilk kavramın terk edilmesi ve başarılı bir kavramsal değişimin gerçekleşmesi için bireyin mevcut problem karşısında kendini yetersiz hissetmesi ve çelişkiye düşmesi gerekir. Ayrıca yeni kavram anlaşılabilir (bireyin öğrenebileceği kadar açık), akla yatkın ve verimli (problemleri çözebilme potansiyeli olan) olmalıdır (Özdemir ve Clark, 2007). Posner ve diğerleri (1982) tarafından ifade edilen özümseme ve uyum evreleri için Vosniadou (1994) sırasıyla *zenginleştirme (enrichment)* ve *değiştirme (revision)* kavramlarını kullanmıştır. Ona göre kavramsal değişim, öğrencilerin önceki bilgilerini zenginleştirmesi ve değiştirmesi yoluyla oluşan, yavaş ve kademeli bir süreçtir. Burada *zenginleştirme* aşamasında var olan kavramsal yapıya yeni bilgilerin eklenmesi, *değiştirme* aşamasında ise düşünce ve varsayımlarda veya teorinin yapısında bir değişiklik olması söz konusudur.

Öğrencilerin fen öğrenmeleri esnasında ısrarla tekrar eden kavram yanılgılarını açıklamak için geliştirilen kavramsal değişime teori nitelikli yaklaşım (the framework theory approach to conceptual change) matematik alanında da son yıllarda kullanılmaya başlanmıştır (Vamvakoussi ve Vosniadou, 2007; Vamvakoussi ve Vosniadou, 2010; Vosniadou ve Verschaffel, 2004). Bu yaklaşımda, sayı kavramının gelişimi ile ilgili olarak öğrencilerin rasyonel sayılar ile karşılaşmadan önce kendi içerisinde tutarlı sayı bilgileri olduğu varsayılır. Buna göre sayılar ile sayma işlemi yapılır ve her zaman son sayılan sayıdan sonra bir ardışığı (o sayıya 1 ekleyerek) vardır. Ancak rasyonel sayılar kümesinin yapısı bundan farklıdır. Matematik öğrenme veya öğretme ile ilgilenmekte olan herkes, rasyonel sayıların kavranmasının öğrenciler için zor olduğunu bilir (Desmet, Gregoire ve Mussolin 2010). Matematik eğitimi alanında yapılan araştırmalar, öğrencilerin doğal sayılar veya tamsayılar ile ilgili mevcut bilgilerine rasyonel sayılar ile işlem yaparken başvurduklarını göstermektedir. Bu durum hem işlemsel hem de kavramsal anlamada kavram yanılgıları ile sonuçlanmaktadır (Ni ve Zhou, 2005; Thompson ve Offer, 2008). Örneğin, doğal sayılar kümesinde geçerli olan çarpma işlemi ile sonucun büyümesi özelliğini rasyonel sayılar kümesine de genellemeleri, öğrencilerin doğal sayılar ile ilgili sahip oldukları ön bilgilerinin bir sonucudur. Karşılaşılan bu gibi durumlar, yeni bilginin öğrenilmesi sırasında önceden bilinenler ile bilişsel çelişki yaşandığını savunan kavramsal değişime teori nitelikli yaklaşıma uygundur. Bu iddia birçok çalışmada (Desmet, Gregoire ve Mussolin 2010; Merenluoto ve Lehtinen, 2002; Merenluoto ve Palonen, 2007; Stafylidou ve Vosniadou, 2004: Vamvakoussi ve Vosniadou, 2004) doğal sayılarda geçerli olan özelliklerin tümünün rasyonel ve reel sayılar kümesinde kullanılamayacağının farkına varılmasının kavramsal değişim gerektirdiği belirtilerek de desteklenmektedir.

Vamvakoussi ve Vosniadou (2010) kavramsal değişime teori nitelikli yaklaşımda, kavramların anlaşılmasında ilk anlamadan daha detaylı anlamaya geçişte; öğrenenin önceki bilgileri ile ulaşılması hedeflenen bilgiler arasında *sentetik kavramların (synthetic concepts)* doğduğunu öngören bir geçiş süreci olduğunu ileri sürmektedirler. Bu sentetik kavramlarda doğal sayılar, kesirler ve ondalık kesirler ile onların özellikleri rasyonel sayılar kümesinin sahip olduğu özelliklerden uzak olan bir bakışta kümelenmiş olarak birleştirilir. Bu sentetik kavramlar kısmen tutarlı olabilir. Burada kısmen tutarlılık, sıralama ile ilgili görüşlerin aralığın sınır değerlerinin özel tiplerde olması durumunda (doğal sayı, kesir, ondalık kesir) tutarlı olduğu, ancak diğer durumlarda tutarlı olmadığı anlamına gelmektedir. Doğal sayılar ile ilgili bakış açısından rasyonel sayılar ile ilgili bakış açısına geçiş, kademeli ve zaman alıcıdır. Burada sentetik kavramlar, öğrencinin sayı kavramı ile ilgili ilk algılamasından bilimsel algılamaya geçişte köprü görevi görmektedir. İşte bu sentetik kavramların belirlenmesi, anlamanın ara basamakları hakkında sağladığı bilgi açısından kullanışlı olabilir. Örneğin eğer bir öğrenci, iki ondalık kesir arasında sonsuz tane sayı olmasına rağmen iki kesir arasında sonsuz tane sayı olmadığını düşünüyorsa, bu o öğrencinin ondalık kesirler ile kesirlere en azından sıralama açısından aynı yol ile davranmadığını gösterir. Zira bu durum o öğrencinin, kesirler ile ondalık kesirleri aynı sayının birbirine dönüştürülebilen gösterimi olarak değil de farklı türde sayılar olarak gördüğü anlamına gelmektedir.

Rasyonel sayılar ile ilgili olarak Türkiye'de yürütülen çalışmalarda (Alkan, 2009; Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Pesen, 2007; Pesen, 2008; Soylu ve Soylu, 2005; Tezcan, 2003; Uslu, 2006; Yılmaz ve Yenilmez, 2009) genellikle ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin karşılaştırma, sıralama, sayı doğrusunda gösterme, dört işlem yapma vb. konular ile ilgili kavram yanılgıların veya hataların belirlenmesine odaklanıldığı görülmüştür. Ayrıca yine ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin kesirlerle ilgili öğrenme düzeylerini ortaya çıkarmak (Doğan ve Yeniterzi, 2011) veya rasyonel sayıların cebirsel, geometrik model ve sayı doğrusu gösterim becerilerini kullanarak işlem yapma becerilerini karşılaştırmak (Gürbüz ve Birgin, 2008) amacıyla yürütülmüş çalışmalarla da karşılaşılabilmektedir. Yapılan literatür taraması sonucunda Türkiye'de özel olarak rasyonel sayıların yoğunluğu ile ilgili yeterince çalışmanın yürütülmediği, ancak öğrencilerin rasyonel sayılar ile ilgili hata veya kavram yanılgılarını belirlemek amacıyla yürütülen sınırlı sayıda çalışmanın (Bell ve Baki, 1997; Bilgin ve Akbayır, 2002) sonuçları arasında öğrencilerin yoğunluk ile ilgili kavram yanılgılarının olduğunun belirtildiği anlaşılmıştır. Uygulanmakta olan ortaöğretim matematik öğretim programı (MEB, 2005) incelendiğinde, rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğu ile ilgili kazanımlara 9. Sınıf düzeyinde yer verildiği görülebilmektedir. Bu durumda lise öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yoğun bir küme olduğunu bilmelerinin beklendiği anlaşılmaktadır. Bu bağlamda öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğu ile ilgili anlamalarının ne durumda olduğunun belirlenmesi gerekmektedir. Ayrıca öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yapısı ile ilgili anlamaların tespit edilmesi, öğretim sürecinde dikkate alınması gereken faktörlerin belirlenmesi ve öğretim materyallerinde konunun ele alınış biçimine yön vermesi açısından önemlidir. Bu bağlamda araştırmanın amacı, öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğu ile ilgili anlamalarını ortaya koymaktır. Söz konusu amaç için öğrencilerin verilen bir aralıkta kaç tane ve hangi türden sayı olduğu ile ilgili düşünceleri ayrıntılı olarak incelenmiş ve aşağıdaki sorulara cevap aranmıştır:

1. 9. Sınıf öğrencilerinin rasyonel sayıların yoğunluğu ile ilgili anlamaları hangi düzeydedir?
2. 9. sınıf öğrencilerinin herhangi iki rasyonel sayı arasında kaç tane ve ne türde sayı olduğu ile ilgili cevaplarını belirleyen etkenler var mıdır?

Yöntem

Bu çalışmada betimsel araştırma yöntemlerinden özel durum çalışması kullanılmıştır. Bu yöntem, genelleme amacı güdülmeden üzerinde çalışılan konuyu ince ayrıntıları ile olduğu şekilde tanımlama ve neden sonuç ilişkilerini ortaya koymaya olanak sağladığından (Çepni 2007; Ekiz 2003) tercih edilmiştir.

Katılımcılar

Araştırma 2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında, Ordu il merkezinde yer alan ve üçüncü araştırmacının derslerini yürüttüğü lisede yapılmıştır. Çalışma grubunu 25 dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Matematik dersindeki başarıları dikkate alındığında örneklemde her düzeyde öğrencinin yer aldığı söylenebilir. Araştırma etiği çerçevesinde bu öğrenciler bulguların sunumu esnasında Ö1, Ö2, Ö3, ….,Ö25 şeklinde kodlanmıştır.

Veri Toplama Araçları

Araştırmada veri toplama aracı olarak Vamvakoussi ve Vosniadou'nun (2004) soru seti ile klinik mülakatlar kullanılmıştır. Öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla yürütülen klinik mülakatlarda, "neden", "nasıl" içerikli sorularla öğrencilerin sahip oldukları kavramlar ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkarma yoluyla bilişsel beceriler belirlenmeye çalışılmıştır. Her bir öğrenci ile yapılan mülakat yaklaşık 20 dakika sürmüştür. Mülakatlar öğrencilerin kendi sınıflarında ve ders saatlerinin dışında yürütülmüştür. Mülakatlar ses kayıt cihazı ile kaydedilmiş ve sonra metne dönüştürülmüştür.

Verilerin Analizi

Bu araştırmada elde edilen veriler, betimsel analiz ve içerik analiz teknikleri kullanılarak analiz edilmiştir. Yıldırım ve Şimşek'in (2005) de belirttiği gibi betimsel analizde özetlenen ve yorumlanan verilerin içerik analizinde daha derin bir işleme tabi tutulmuştur. Bu süreçte Strauss ve

Corbin'in (1990) belirttiği kodlama çeşitlerinden genel çerçeve içinde yapılan kodlama kullanılmıştır. Bu kodlamada veri analizinden önce genel bir kavramsal yapı vardır, analiz sürecinde bu kavramsal yapıya göre kodlama yapılır, ancak ortaya çıkan yeni kodlar ilgili kısımlara dahil edilir. Çalışmada Vamvakoussi ve Vosniadou'nun (2004) çalışmalarında yer verdikleri sınıflama (Tablo 3) veri analizinden önce genel bir kavramsal yapı olarak alınmış, analiz sürecinde ortaya çıkan yeni durumlar bu sınıflamaya dahil edilmiş veya eskileri ile değiştirilmiştir.

Tablo 3.
Vamvakoussi ve Vosniadou (2004) Tarafından Kullanılan Kategoriler

Cevap kategorileri	0,005-0,006	3/8-5/8	0,001-0,01	5/8-8,5	2/5-4/7
İlkel ayrıklık	Başka sayı yoktur.	Sadece 1 tane sayı vardır.	Sonlu sayıda var(>=0)	_	_
Gelişmiş ayrıklık	Sonlu sayıda var(>0)	Sonlu sayıda var(>1)	Sonlu sayıda var(>=0)	_	_
Ayrıklık-yoğunluk	Sonsuz sayıda cevabı bazı sorularda görülür fakat hepsinde değil.				
İlkel yoğunluk	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır (Birini diğeri cinsinden ifade etme gereği duyar).	Sonsuz sayıda sayı vardır (Payda eşitleyerek karar verir).
Sofistike yoğunluk	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır (Birini diğeri cinsinden ifade etme gereği duymaz).	Sonsuz sayıda sayı vardır (Payda eşitlemeye gerek duymaz).

Çalışma grubundaki öğrencilerin cevaplarının Tablo 3'teki kategorilere göre analiz edilmesi sonucu Tablo 4 oluşturulmuştur.

Tablo 4.
Öğrencilerin Vamvakoussi ve Vosniadou (2004) Tarafından Kullanılan Kategorilere Göre Dağılımları

Düzeyler	Öğrenciler
İlkel ayrıklık	Ö4-Ö6-Ö8-Ö10-Ö14-Ö15-Ö16-Ö19-Ö21-Ö24
Gelişmiş Ayrıklık	Ö25
Ayrıklık-yoğunluk	Ö17-Ö20
İlkel yoğunluk	Ö1-Ö7-Ö23
Sofistike yoğunluk	Ö2-Ö3-Ö13

Tablo 4'ten görüleceği üzere örneklemde yer alan 25 öğrencinin 6'sı (Ö5,Ö9,Ö11,Ö12,Ö18,Ö22) ilgili ölçütleri sağlamamaları nedeniyle herhangi bir düzeye atanamamıştır. Öğrencilerin cevapları incelendiğinde iki ayrı durumla karşılaşılmıştır. Mülakatlarda öğrencilerin aralıkta kaç tane sayı olduğu yönünde görüşleri alındıktan sonra bu sayıların niteliği (ondalıklı, kesirli vb.) ile ilgili olarak düşünceleri sorulmuş ve açıklamalarını örnekler vererek yapmaları istenmiştir. Bu süreçte, dört öğrencinin (Ö5,Ö9,Ö12,Ö18) aralıkta yer alan sayılara yanlış örnekler verdikleri belirlenmiştir (birinci durum). Aşağıda buna örnek bir mülakat alıntısı verilmiştir:

Araştırmacı : *0,001 ile 0,01 arasında kaç sayı var?*
Ö18 : *1 en büyüğü olduğuna göre 1 ile 100 arasındaki sayılar, 0,02, 0,03 diye devam eder. Sayılabilir bunlar…*
Araştırmacı : *3/8 ile 5/8 arasında kaç tane sayı var?*
Ö18 :*4/8 var…3/8 ile 4/8 arasında 3/9, 3/10 diye devam edebilir ve 4' geldikten sonra da 4/8'den 5'e kadar…5'e gelince de 5'ten 8'e kadar… Bunlar da sayılabilir…*

Bu nitelikteki cevapları veren bu öğrencilerin en altta yer alacak yeni bir düzeye (0. Düzey) atanması uygun görülmüştür. Diğer taraftan Ö11 ve Ö22'nin 0,001-0,01, 3/8-5/8, 0,005-0,006 aralıklarında kaç sayı olduğu sorusuna sırasıyla sonlu (ondalık sayı), bir (4/8) ve sonlu (ondalık sayı) cevabını verdikleri belirlenmiştir (ikinci durum). Bu cevaplar görüldüğü gibi Tablo 3'te açıklanan kategorilerin hiçbiri ile uyum sağlamamaktadır. Bunun nedeni 3/8-5/8 arasındaki sayılara "sonlu tane vardır" cevabı yerine "bir tane vardır" cevabının verilmesidir (Bkz. Tablo 3). Bu durum ile birden çok kez karşılaşıldığından bu cevabı karşılayacak yeni bir düzeyin ortaya konmasına karar verilmiştir. Bu nedenle yukarıda verilen ilk iki düzey (ilkel ayrıklık-gelişmiş ayrıklık) arasına bir geçiş düzeyi eklenmiştir. Veriler Tablo 5'te yer verilen kategorilere göre birinci araştırmacı tarafından farklı zamanlarda kodlanmış ve bu işlem sonucunda öğrencilerin belirlenen kategorileri aynı şekilde yerleştirildiği görülmüştür. Diğer taraftan her düzey için, bir örnek öğrencinin verdiği cevapları içeren mülakatlar doğrudan alıntı yoluyla okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 5.
Geliştirilen Kategoriler

Cevap kategorileri	0,001-0,01	3/8-5/8	0,005-0,006	5/8-8,5	2/5-4/7
Düzey 0	Verilen aralıkta olmayan örnekler verme				
Ayrıklık Düzey 1	Sonlu sayıda var(>0)	Sadece 1 tane sayı vardır.	Başka sayı yoktur.	_	_
Ayrıklık Düzey 2	Sonlu sayıda var(>0)	Sadece 1 tane sayı vardır.	Sonlu sayıda var(>0)	_	_
Ayrıklık Düzey 3	Sonlu sayıda var(>0)	Sonlu sayıda var(>1)	Sonlu sayıda var(>0)	_	_
Ayrıklık-yoğunluk	Sonsuz sayıda cevabı bazı sorularda görülür fakat hepsinde değil.				
Yoğunluk Düzey 1	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır (Birini diğeri cinsinden ifade etme gereği duyar).	Sonsuz sayıda sayı vardır (Payda eşitleyerek karar verir).
Yoğunluk Düzey 2	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır (Birini diğeri cinsinden ifade etme gereği duymaz).	Sonsuz sayıda sayı vardır (Payda eşitlemeye gerek duymaz).

Bulgular

Elde edilen verilerin Tablo 5'te yer verilen kategorilere kodlanması yoluyla Tablo 6 elde edilmiştir.

Tablo 6.
Öğrencilerin Geliştirilen Kategorilere Göre Dağılımları

Düzey kategorileri		Öğrenciler (N=25)	f	%
Düzey 0		Ö5,Ö9,Ö12,Ö18	4	16
Ayrıklık	Düzey 1	Ö4-Ö6-Ö8-Ö10-Ö14-Ö15-Ö16-Ö19-Ö21-Ö24	10	40
	Düzey 2	Ö1-Ö22	2	8
	Düzey 3	Ö25	1	4
Ayrıklık-yoğunluk		Ö17-Ö20	2	8
Yoğunluk	Düzey 1	Ö1-Ö7-Ö23	3	12
	Düzey 2	Ö2-Ö3-Ö13	3	12

Tablo 6 incelediğinde 4 öğrencinin (%16) verilen aralıklarda olmayan örnekler vermeleri nedeniyle Düzey 0'a, 13 öğrencinin (%52) ayrıklık ile ilgili düzeylere, 2 öğrencinin (%8) ayrıklık-yoğunluk düzeyine ve 6 öğrencinin (%24) yoğunluk ile ilgili düzeylere atandığı görülmektedir. Bu bulgular öğrencilerin yarısından fazlasının rasyonel sayılar kümesinin doğal sayılar kümesinin sahip olduğu ayrıklık özelliğine sahip olduğunu düşündüğünü göstermektedir. Buna karşın birbirinden farklı herhangi iki rasyonel sayı arasında gösterim şekli nasıl olursa olsun daima sonsuz rasyonel sayı olduğunu belirten (Yoğunluk 2. düzey) 3 öğrencinin (%12) olduğu anlaşılmaktadır. Yoğunluk 1. düzeyde yer alan 3 öğrenci (%12) ise birbirinden farklı herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı olduğunu ancak farklı gösterimde verilen rasyonel sayıları birbirine dönüştürerek (5/8-8,5 örneği) veya payda eşitleyerek (2/5-4/7) karar veren öğrencilerdir. Bu öğrenciler aynı zamanda aralıkta yer alan sonsuz tane sayının aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olması gerektiğini düşünen öğrencilerdir. Diğer taraftan ayrıklık-yoğunluk düzeyinde 3 öğrenci (%12) yer almaktadır. Bu öğrenciler ise bazı durumlarda verilen iki rasyonel sayı arasında sonsuz rasyonel sayı olduğunu düşünmektedir. Örneğin iki ondalık kesir arasında sonsuz buna karşılık iki kesir arasında sonlu tane sayı olduğunu düşünen öğrenciler bu düzeye atanmışlardır.

Verilerin analizi sürecinde öğrencilerin verilen aralıktaki sayılara karar verirken iki farklı gruba ayrılabilecek nitelikte ifadelerde bulundukları dikkat çekmiştir. Bu nedenle elde edilen bulgular aşağıda açıklanan bu iki grup için ayrı ayrı sunulmuştur.

- Grup 1: Aralıkta yer alan sayılara aralığın sınır değerleri ile aynı tipte olması gerektiğini düşünen öğrenciler
  Grup1a: Verilen gösterim üzerinde yorum yapanlar
  Grup1b: Dönüştürme işleminden sonra yorum yapanlar
- Grup 2: Aralıkta yer alan sayıların aralığın sınır değerlerinden bağımsız olduğunu düşünen öğrenciler

Tablo 7'de öğrencilerin verdikleri cevapların dağılımı verilmektedir:

Tablo 7.
Öğrencilerin Verdiği Cevapların Dağılımı

Aralıklar	Kodlar	Grup1		Grup 2
		Grup1a	Grup1b	
0,001-0,01	Aralıkta olmayan örnek verme	Ö12	Ö5	
	Sonlu sayıda sayı vardır	Ö6-Ö8-Ö9-Ö14-Ö16-Ö18-Ö19-Ö21-Ö22-Ö24-Ö25	Ö4-Ö10-Ö15	
	Sonsuz sayıda vardır.	Ö7-Ö17-Ö20	Ö1-Ö23	Ö2-Ö3-Ö13
3/8-5/8	Aralıkta olmayan örnek verme	Ö9-Ö18		
	Yalnız bir tane vardır.	Ö6-Ö8-Ö11-Ö16-Ö17-Ö19-Ö20-Ö21-Ö22-Ö24	Ö4-Ö10-Ö15	
	4/8'e denk sonsuz tane vardır.	Ö14		
	Sonlu sayıda vardır(birden çok)	Ö25		
	Sonsuz tane vardır.	Ö7	Ö1-Ö5-Ö23	Ö2-Ö3-Ö13
0,005-0,006	Başka sayı yoktur.	Ö6-Ö8-Ö12-Ö14-Ö16-Ö18-Ö19-Ö20-Ö21-Ö24	Ö4-Ö10-Ö15	
	Sonlu sayıda sayı vardır.	Ö9-Ö11-Ö22-Ö25		
	Sonsuz sayıda vardır.	Ö7-Ö17	Ö1-Ö5-Ö23	Ö2-Ö3-Ö13
5/8-8,5	Sonsuz tane vardır(dönüştürerek)	Ö7	Ö23	
	Sonsuz tane vardır(dönüştürmeden)			Ö2-Ö3-Ö13

Tablo 7'den Grup 1a'nın 16 öğrenciden (Ö6-Ö7-Ö8-Ö9-Ö11-Ö12-Ö14-Ö16-Ö17-Ö18-Ö19-Ö20-Ö21-Ö22-Ö24-Ö25), Grup 1b'nin 6 öğrenciden (Ö1-Ö4-Ö5-Ö10-Ö15-Ö23) ve Grup 2'nin 3 öğrenciden (Ö2-Ö7-Ö13) oluştuğu anlaşılmaktadır. Bu veriler öğrencilerin çoğunluğunun (%88) birinci grupta yer aldığını göstermektedir. Öğrencilerin belirlenen düzeyler atanması sonucu ise Tablo 8 oluşturulmuştur.

Tablo 8.
Grup 1 ve Grup 2'deki Öğrencilerin Geliştirilen Düzeylere Dağılımı

Düzey kategorileri		Grup 1		Grup 2
		Grup 1a	Grup 1b	
Düzey 0		Ö9,Ö12,Ö18	Ö5	
Ayrıklık	Düzey 1	Ö6-Ö8-Ö14-Ö16-Ö19-Ö21-Ö24	Ö4-Ö10-Ö15	
	Düzey 2	Ö11-Ö22		
	Düzey 3	Ö25		
Ayrıklık-yoğunluk		Ö17-Ö20		
Yoğunluk	Düzey 1	Ö7	Ö1-Ö23	
	Düzey 2			Ö2-Ö3-Ö13

Tablo 8'den Grup 1a'da yer alan öğrencilerin tümünün son düzey hariç tüm düzeylere, Grup 2'de yer alan öğrencilerin tümünün ise son düzeye (Yoğunluk Düzey 2) atandığı anlaşılmaktadır. Diğer taraftan Grup1b'deki öğrencilerin farklı düzeylerde yer alabilecek cevaplar verdikleri görülmektedir.

Grup 1'de yer alan öğrenciler, verilen herhangi iki rasyonel sayı arasında yer alan sayıların aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olması gerektiği yönünde düşüncelere sahiptir. Grup 1a'yı ise verilen aralıktaki sayılar ile ilgili yorum yaparken aralığın sınır değerleri için herhangi bir dönüştürme işlemi yapmadan düşüncelerini açıklayan öğrenciler oluşturmaktadır. Örneğin bir öğrenci 0,001-0,01 arasındaki sayılar için aralığın sınır değerlerine herhangi bir müdahale etmeden (kesirli sayıya çevirmeden) olduğu haliyle düşüncelerini açıklamışsa ve aralıkta yalnızca ondalık sayıların olduğunu belirtmişse bu gruba dahil edilmiştir. Grup 1a'yı oluşturan öğrencilerin cevaplarının Tablo 5'te verilen ölçütlere göre analiz edilmesi sonucunda, aşağıda verilen doğrudan alıntılardan da anlaşılacağı üzere, doğru sıralamayı bilmemeleri veya rasyonel sayılar kümesinin ayrık olduğunu işaret eden yorumlar yapmaları nedeniyle düzey 0 veya ayrıklık düzeylerinden birinde olduklarına karar verilmiştir.

Düzey 0'da rasyonel sayıların doğru sıralamasını bilmemeleri nedeniyle verilen aralıktaki sayılara yanlış örnekler veren öğrenciler yer almaktadır. Aşağıda bu düzeyde yer alan Ö9 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat alıntısına yer verilmektedir:

Araştırmacı *: 3/8 ile 5/8 sayıları arasında kaç tane sayı var?*
Ö9 *: 8/2 değerinde bir sayı var…*
Araştırmacı *: 3/8 ile 5/8 arasında?*
Ö9 *: (paydaların eşitliğini kontrol ettikten sonra)…2/8, -2/8*
Araştırmacı *: Bir tek o mu var?*
Ö9 *: -1/8 de var…*
Araştırmacı *:Kaç tanedir bunlar?*
Ö9 *: Sınırlı sayıdadır…*

Yukarıda yer verilen mülakat alıntısından da anlaşılacağı üzere Ö9, 3/8 ile 5/8 arasında yer alan sayıları belirlemek için 3/8'den 5/8'i çıkararak -2/8 yanıtını vermiştir. Bu yanıt öğrencinin doğru sıralamayı bilmediğini göstermektedir.

Ayrıklık Düzeyinde doğal sayıların sahip olduğu ayrıklık özelliğini rasyonel sayılara da genelleyen öğrenciler yer almaktadır. İçerik analizi sürecinde, verilen cevaplara göre bu düzeyin aşağıda mülakat alıntıları ile betimlenen üç alt düzeye ayrılmasına karar verilmiştir.

Ayrıklık Düzey 1'de yer alan öğrenciler verilen rasyonel sayıları doğal sayılar gibi ardışık düşünen öğrencilerdir. Örneğin 0,005 ile 0,006 ondalık sayıları bu öğrencilere göre ardışıktır. Bu nedenle bu iki ondalık sayı arasında başka sayının olmadığı yönünde görüşler taşımaktadırlar. Benzer şekilde bu öğrenciler 3/8 ile 5/8 arasında yalnızca 4/8'in olduğunu düşünmektedirler. Ondalık kısmının basamak sayısı eşit olmayan iki ondalık sayının arasında (0,001-0,01 gibi) benzer düşünce ile sonlu sayıda ve yine ondalık olan sayılar olduğunu düşünmektedirler. Aşağıda bu düzeyde yer alan Ö19 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat alıntısına yer verilmektedir:

Araştırmacı *:0,001 ile 0,01 arasında kaç sayı var? Örnekle açıklar mısın?*
Ö19 *: 0,001- 0,002-0,003 böyle gider…*
Araştırmacı *:Kaça kadar gider?*
Ö19 *:0,009'a kadar.*
Araştırmacı *: 3/8 ile 5/8 arasında?*
Ö19 *: 1 tane var, 4/8*
Araştırmacı *: Peki 0,005 ile 0,006 arasında?*
Ö 19 *: Orda yok…*

Ayrıklık Düzey 2'de yer alan öğrenciler bir önceki düzeydeki öğrencilerden 0,005-0,006 arasındaki sayılar ile ilgili verdikleri cevaplar nedeniyle ayrılmaktadır. Bu öğrenciler bu iki sayı arasında sonlu sayıda sayı olduğunu düşünmektedirler. Aşağıda bu düzeyde yer alan Ö11 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat alıntısına yer verilmektedir:

Araştırmacı *: 0,001 ile 0,01 arasında kaç sayı var? Örnekle açıklar mısın?*
Ö11 *: Çok vardır…0,0011 mesela…*
Araştırmacı *: Bunları sayabilir miyiz?*
Ö11 *: Sayılabilirler…0,0099'e kadar*
Araştırmacı *: 3/8 ile 5/8 arasında?*
Ö11 *: Çok vardır herhalde, ya da iki tane, 4/8 ile… 1 tane varmış, 4/8*
Araştırmacı *: Peki 0,005 ile 0,006 arasında?*
Ö11 *: Vardır…*
Araştırmacı *: Bir örnek verir misin?*
Ö11 *: 0,0051*
Araştırmacı *: Onlar ne kadardır?*
Ö11 *: Bu ikisi arasında 9 tane var…*

Ayrıklık Düzey 3'te yer alan öğrenciler bir önceki düzeydeki öğrencilerden 3/8-5/8 arasındaki sayılar ile ilgili verdikleri cevaplar nedeniyle ayrılmaktadır. Bu düzeyde yalnız bir öğrenci yer almaktadır. Bu öğrenci bu iki sayı arasında sonlu sayıda sayı olduğunu düşünmektedir. Aşağıda bu düzeyde yer alan Ö25 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat alıntısına yer verilmektedir:

Araştırmacı *: 0,001 ile 0,01 arasında kaç sayı var?*
Ö25 *: Bu binde bir, bu yüzde 1, arada 100 ile 1000 arasındaki kadar sayı vardır…*
Araştırmacı *: Bunlar nasıl sayılardır?*
Ö25 *: 0,002, 0,003…Ondalık sayılardır…*
Araştırmacı *: 3/8 ile 5/8 arasında?*
Ö25 *: 4/8 vardır…3,1/8 - 3,2/8 vardır… Bu böyle gider…*
Araştırmacı *: Ne kadar?*
Ö25 *:20 tane…*
Araştırmacı *: Peki 0,005 ile 0,006 arasında?*
Ö25 *: 10 tane var…0,0051-0,0052… Böyle gider…*

Ayrıklık-Yoğunluk Düzeyindeki öğrenciler birbirinden farklı olarak verilen herhangi iki rasyonel sayı arasında yalnız bazı durumlarda sonsuz tane sayı olduğu düşünen öğrencilerdir. Yapılan analiz esnasında bu nitelikte cevap veren iki öğrenci olduğu belirlenmiştir. Aşağıda bu düzeyde yer alan Ö20 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat alıntısına yer verilmektedir:

Araştırmacı : 0,001 ile 0,01 arasında kaç sayı var?
Ö20 : Vardır… Sonsuz…0,008-0,009 gibi mesela…
Araştırmacı : Bunlar nasıl sayılardır?
Ö20 : Virgüllü…
Araştırmacı : 3/8 ile 5/8 arasında?
Ö20 : 4/8 vardır… Başka yok…
Araştırmacı : Peki 0,005 ile 0,006 arasında?
Ö20 : Onda yok…

Diğer öğrenci (Ö17) ise Ö20'den farklı olarak 0,005-0,006 sayıları arasında sonsuz tane sayı bulunabildiğini ifade etmiştir. Bu öğrencilerin cevapları incelendiğinde her ikisinin de 3/8 ile 5/8 arasında yalnızca 4/8 sayısının olduğunu belirtmelerine rağmen, sınır değerleri ondalık kesirler olan aralıklardan en az birinde arada farklı gösterimlerde de olabilecek sonsuz tane sayı olduğunu düşündükleri anlaşılmıştır.

Yoğunluk Düzey 1'deki öğrenciler birbirinden farklı olarak verilen herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane ve ancak aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olan sayılar olduğunu ifade eden öğrencilerdir. Ayrıca bu öğrenciler ilk üç soruya sonsuz cevabını vermeleri nedeniyle sorulan ek sorularda, düşüncelerini ancak aralığın sınır değerlerinden birini diğerine dönüştürdükten (5/8-8,5 örneği) veya paydaları eşit olmayan kesirlerin (2/5-4/7) paydalarını eşitledikten sonra açıklayabilmişlerdir. Aşağıda bu düzeyde yer alan Ö7 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat alıntısına yer verilmektedir:

Araştırmacı : 0,001 ile 0,01 arasında kaç sayı var?
Ö7 : Sonsuz tane var…
Araştırmacı : Örnekler verebilir misin?
Ö7 : 0,002, 0,003, ...0,009. Sonsuz sayıda değil aslında… Ya 9 ya da 10 tane…
Araştırmacı : Az önce sonsuz tane demiştin?
Ö7 : Aslında sonsuz olması lazım da örnek verince… Çünkü arada virgüllü sayılar, devirli sayılar var… Arasında bir sürü sayı var aslında ama örnek veremediğim için…
Araştırmacı : 3/8 ile 5/8 arasında kaç tane var?
Ö7 : Sonsuz sayıda… Bunu sekize bölünen bir pastanın üçü gibi düşünürsek, çok küçük bir parça daha veririz, çok küçük bir parça daha sonsuz sayıda verebiliriz.
Araştırmacı : 0,005 ile 0,006 arasında kaç tane sayı var?
Ö7 : Onda da aynı şekilde sonsuz tane var…
Araştırmacı : 5/8 ile 8,5 arasında peki?
Ö7 : 5/8… yarıdan biraz fazla… Evet, burada da aynı… Sonsuz tane vardır.
Araştırmacı : 2/5 ile 4/7 arasında?
Ö7 : Payda eşitlersek… 14/35-20/35 arasında sonsuz sayıda vardır…

Elde edilen bulgular Grup 1a'da yer alan öğrencilerin en üst düzey olan Yoğunluk Düzey 2 hariç tüm düzeylere dağıldığını göstermektedir. Bu veriler bir aralıkta yer alan sayıların aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olması gerektiğini düşünen öğrencilerin, rasyonel sayılar kümesi ile ilgili farklı anlamalarının olduğunu ifade etmektedir.

Grup 1b'yi verilen bir aralıkta yer alan sayılar ile ilgili yorum yaparken verilen gösterim üzerinde düşünerek değil birtakım dönüştürmeler yaptıktan sonra düşüncelerini açıklayan öğrenciler oluşturmaktadır. Örneğin bir öğrenci 0,001-0,01 arasındaki sayılar için görüşlerini açıklarken bunları 1/1000-1/100 şekline dönüştürdükten sonra karar vermiş ve aralıkta yalnızca kesirli sayıların olduğunu belirtmişse bu gruba dahil edilmiştir (öğrencinin 3/8-5/8 arasındaki sayılara karar verirken bunları ondalık hale dönüştürmesi durumunda, aralıktaki sayıların yalnızca ondalık sayılar olduğunu belirtmesi de benzer şekilde bu grupta değerlendirilmiştir). Bu grubu oluşturan öğrencilerin cevaplarının Tablo 5'te verilen ölçütlere göre analiz edilmesi sonucunda, bu öğrencilerin farklı düzeylere dağılım gösterdikleri belirlenmiştir. Örneğin Ö5, 0,001-0,01 arasındaki sayılar ile ilgili yorum yaparken öncelikle bunları 1/1000 ve 1/100 olarak biçimine dönüştürmüş ve fikrini *"sonsuz tane vardır… Onu bölersin, bölersin 5/10-6/12-7/13 öyle öyle gider"* şeklinde aralıkta olmayan sayılara örnekler vererek açıkladığı için Düzey 0'a dâhil edilmiştir. Ö4, Ö10 ve Ö15 ise yine aynı şekilde 0,001-0,01 gösterimini 1/1000-1/100 şekline dönüştürdükten sonra arada sonlu sayıda kesirli sayı (1/999-1/998 gibi) olduğunu belirtmişlerdir. Bunun yanında 3/8-5/8 arasındaki sayılar için aralığın sınır değerlerinde herhangi bir dönüşüm yapmadan yalnızca 4/8 olduğunu ve 0,005-0,006 arasındaki sayılar için ise 5/1000-6/1000 dönüşümünü yaptıktan sonra arada başka sayı olmadığını belirtmeleri nedeniyle bu öğrenciler Ayrıklık Düzey 1'dedeğerlendirilmiştir.

Diğer taraftan Ö1, 0,001-0,01, 3/8-5/8 arasında ondalık kesire çevirdikten sonra ve 0,005-0,006 arasında sonsuz tane ondalık kesir olduğunu belirtmiştir. Tüm sorular için sonsuz cevabının alınması nedeniyle sorulan ek sorularda ise (örneğin 5/8-8,5) yine dönüştürme işlemi yaparak karar verdiği için bu öğrenci Yoğunluk Düzey 1'de değerlendirilmiştir. Ö23 ise 0,001-0,01 arasında 1/1000-1/100 şeklinde dönüştürdükten sonra, 3/8-4/8 ve 0,005-0,006 arasında 5/1000-6/1000 şekline dönüştürdükten sonra sonsuz tane kesirli sayı olduğunu belirtmiştir. Ek soruda ise (2/5-4/7) kararını payda eşitledikten sonra aynı yönde verdiği için bu öğrenci de benzer şekilde Yoğunluk Düzey 1'de değerlendirilmiştir. Görüldüğü gibi Grup 1b'deki öğrenciler, verilen aralıkların sınır değerlerini kendi belirledikleri bir gösterime çevirdikten sonra arada yine aynı türden sayılar olduğunu ifade etmekte yani kesir ve ondalık kesirlerin rasyonel sayıların farklı gösterim şekilleri olduklarını göz ardı etmektedir.

Yapılan mülakatlarda bir grup öğrencinin verilen herhangi iki rasyonel sayı arasında yer alan sayıların, aralığın sınır noktalarından bağımsız olarak farklı gösterimlerde de olabileceği yönünde düşüncelere sahip olduğu anlaşılmıştır. Grup 2'yi oluşturan bu öğrencilerin cevaplarının Tablo 5'te verilen ölçütlere göre analiz edilmesi sonucunda, bu öğrencilerin Yoğunluk Düzey 2'de oldukları belirlenmiştir. Yoğunluk Düzey 2'deki öğrenciler gösterim şekli nasıl olursa olsun birbirinden farklı olarak verilen iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane sayı olduğunu belirten öğrencilerdir. Dolayısıyla bu öğrenciler bir önceki düzeydeki öğrenciler gibi birbirine dönüştürme veya payda eşitleme gereği duymadan aralıkta sonsuz tane ve her türden sayı olduğu yönündeki düşüncelerini açıklamışlardır. Aşağıda bu düzeyde yer alan Ö13 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat alıntısına yer verilmektedir:

Araştırmacı *: 0,001 ile 0,01 arasında kaç sayı var?*
Ö13 *: 10 tane var… Ne 10'u? 1000 tane var…*
Araştırmacı *: 3/8 ile 5/8 arasında kaç tane var?*
Ö13 *: Bayağı vardır… Bunların arasında kesirler de vardır… Virgüllüler de…*
Araştırmacı *: Kaç tanedirler?*
Ö13 *: Tahmin edemem şimdi, yazsam da bulamam…*
Araştırmacı *: Bulabilecek biri var mıdır?*
Ö13 *: Bence yoktur… O zaman az öncekinde de sonsuz tane var…*
Araştırmacı *: Örnek verebilir misin?*
Ö13 *: 3,2/8- 3,002/8*
Araştırmacı *: 0,005 ile 0,006 arasında kaç tane sayı var?*
Ö13 *: Yine reel sayılar var…*
Araştırmacı *: Kaç tane?*
Ö13 *: Tahmin edemem…*
Araştırmacı *: 5/8 ile 8,5 arasında peki?*
Ö13 *: Aynı şey oluyor… Kaç tane doğal sayı var denirse söylerim… Reel sayıları tahmin edemem çoklar…*

Tartışma

Öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğu ile ilgili anlamalarını ortaya koymak amacıyla yürütülen bu araştırmadan elde edilen bulgular, daha önce yürütülmüş pek çok çalışmada olduğu gibi doğal sayılar kümesine özgü olan ayrıklık özelliğinin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlamada engel teşkil ettiğini ortaya koymaktadır (Aktaş ve Cansız-Aktaş, 2012; Malara, 2001; Merenluoto ve Lehtinen, 2004; Vamvakoussi ve Vosniadou, 2007). Nitekim araştırmadan elde edilen veriler, öğrencilerin büyük çoğunluğunun (%88) Grup 1'de yer aldığını göstermektedir. Bu, öğrencilerin herhangi iki rasyonel sayı arasında yer alan sayıların mutlaka aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olan sayılar olması gerektiği yönünde düşünceler taşıdıkları anlamına gelmektedir. Grup 1'de yer alan öğrencilerin düzeylere dağılımına bakıldığında ise bu grupta yer alan öğrencilerin %43.8'inin Ayrıklık Düzey 1'de yer aldığı anlaşılmaktadır. Bu, sözü edilen öğrencilerin 0,001-0,01 arasında sonlu tane, 3/8-5/8 arasında 1 tane (4/8) sayı olduğu ve 0,005-0,006 arasında ise herhangi bir sayı olmadığı yönünde cevaplar verdikleri anlamına gelmektedir. Ayrıklık Düzey 2'de yer alan öğrenciler ise bir önceki düzey öğrencilerinden 0,005-0,006 arasında sonlu tane sayı olduğunu belirtmeleri nedeniyle ayrılmaktadır. Bu öğrenciler burada 0,0051-0,0052…şeklinde bir ondalık basamak ekleyebileceklerini belirtmişler ancak bu işleme bir (0,00511-0,00512…) veya daha fazla (0,005111-0,00512…gibi) basamak ekleyebilecekleri yönünde görüş belirtmemişlerdir. Vamvakoussi ve Vosniadou (2004) de aynı bulguya ulaştığını ifade etmektedir. Ayrıklık Düzey 3 öğrencileri ise bir önceki düzey öğrencilerinden 3/8-5/8 arasında sonlu tane sayı olduğunu belirtmeleri nedeniyle ayrılmaktadır. Görüldüğü gibi bu düzeylerde yer alan öğrenciler sorulara doğal sayılar kümesinin ardışıklık özelliğini kullanarak cevap vermektedirler. Zira Baki (2006) da öğrencilerin ondalık kesir sayılarını doğal sayılar gibi ardışık düşünmeleri nedeniyle verilen iki yakın ondalık kesir arasında sonsuz sayıda ondalık kesir yazılabileceğini fark edemediklerini belirtmektedir. Aynı husus yine pek çok çalışmada dile getirilmiştir (Moss, 2005; Ni ve Zhou, 2005; Smith vd. 2005; akt:Vamvakoussi, Christou, Mertens ve Van Dooren, 2011). Gerçekten bu çalışmada da ayrıklık ile ilgili düzeylerde yer alan öğrencilerin -ki bu öğrenciler bu çalışmada çoğunluğu oluşturmaktadır- benzer düşünceler içinde olduklarını söyleyebiliriz. Birinci grubun diğer düzeylerindeki öğrenciler ise, verilen aralıkta ancak aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olan sonsuz tane sayı olduğu yönünde görüş belirtmişlerdir.

Araştırmada elde edilen bir diğer dikkat çekici bulgu 3/8 ile 5/8 asasında sonsuz tane kesir olduğunu belirtilirken 4/8, 8/16… kesirlerinin örnekler olarak gösterilmesidir. Yani birbirine eşit olan bu kesirler farklı sayılar olarak algılanmaktadır. Mitchell (2005, akt: Vamvakoussi ve Vosniadou, 2010) ve Vamvakoussive Vosniadou (2004) tarafından yürütülen çalışmalarda da benzer durumla karşılaşıldığı belirtilmektedir.

Öğrenciler kesir ve ondalık kesirleri aynı sayının birbirine dönüştürülebilen farklı gösterimleri olarak değil, farklı türden sayılar olarak görebilmektedirler (O'Connor, 2001). Bu araştırmadan elde edilen bulgular da aynı noktayı işaret etmektedir. Grup 1a'daki öğrencilerin örneğin ondalık kesirler ile kesirlerin rasyonel sayıların birbirine dönüştürülebilen farklı gösterimleri olarak değil de farklı sayı kümeleri olarak algılandıkları belirlenmiştir. Grup 1b'deki öğrencilerin cevaplarının daha ilgi çekici olduğu düşünülmektedir. Zira bu öğrenciler, kesirler ile ondalık kesirlerin birbirlerine dönüştürülebildiğini bilmelerine ve düşüncelerini aralığın sınır değerlerini kendi tercih ettikleri bir türe değiştirdikten sonra açıklamalarına rağmen aralıkta yalnız aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olan sayıların bulunduğunu belirtmişlerdir. Elde edilen bu bulgular, öğrencilerin iki kesir arasında ondalık kesirlerin yer aldığını kabul etmede gönülsüz oldukları sonucuna varan Vamvakoussi ve Vosniadou'nun (2010) çalışmasının sonuçları ile aynı noktayı işaret etmektedir. Öğrenciler tarafından ileri sürülen bu nitelikteki görüşler Vamvakoussi ve Vosniadou (2007) ve Vamvakoussi ve Vosniadou (2010) tarafından belirtilen *sentetik modeller* olarak yorumlanabilir. Örneğin 0,005 ile 0,006 arasındaki sayıların yalnız 0,0051, 0,0052, …0,059, 0,006 olduğunun ifade edilmesi öğrencilerin doğal sayıların sahip olduğu özellikleri koruduğu yönünde düşüncelere sahip olduklarını göstermektedir. Benzer şekilde iki ondalık kesir arasında sonsuz tane ondalık kesir olduğunun belirtilip iki kesir arasında sonlu tane olduğunun öne sürülmesi, öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yapısının aralıkların sınır değerlerinin sembolik gösterimlerine göre değişiklik gösterdiği yönünde düşünceleri olduğunu ifade etmektedir. O halde elde edilen bu bulguların öğrencilerin cevaplarının aralığın sınır değerlerine göre şekillendiğini belirten araştırmaların sonuçları ile örtüştüğünü söyleyebiliriz (Aktaş ve Cansız-Aktaş, 2012; Vamvakoussi ve Vosniadou, 2007; Vamvakoussi ve Vosniadou, 2010; Vamvakoussi, Christou, Mertens ve Van Dooren, 2011). Matematik öğretim programında (MEB, 2005) ve okutulmakta olan ders kitabında (MEB, 2007) rasyonel sayıların yoğunluğu üzerinde durulurken, iki rasyonel sayı arasında bulunabilecek rasyonel sayılara verilen örnekler hep kesirli olduğu belirlenmiştir. Her ne kadar konunun devamında her rasyonel sayının bir devirli ondalık açılımı olduğu belirtilmişse de, öğrencilerin aralıkta bulunan sonsuz tane sayının aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olamayabileceğinin hissettirilmesi için dersi yürüten öğretmene büyük görev düşmektedir.

Birbirinden farklı olarak verilen herhangi iki rasyonel sayı arasında farklı gösterimde olabilecek sayıların olabileceğini ifade eden öğrenciler ikinci grupta yer almıştır. Bu öğrenciler farklı gösterimde olabilecek bu sayıların aynı zamanda sonsuz tane olduğunu belirterek Yoğunluk Düzey 2'ye atanmışlardır. Başka bir deyişle bu düzeye atanan üç öğrenci rasyonel sayılar kümesinin yoğun olduğunu kavrayan öğrencilerdir ancak görüldüğü gibi bu öğrencilerin sayısı arzu edilen düzeyde değildir.

Sonuç ve Öneriler

Elde edilen bulgular, öğrencilerin büyük çoğunluğu için doğal sayılar kümesi ile ilgili ön bilgilerinin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlamada engel teşkil ettiğini ortaya koymaktadır. Bunun yanında öğrencilerde verilen bir aralıkta yer alan sayıların aralığın sınır değerleri ile aynı gösterimde olması gerektiği yönünde görüşlerin hâkim olduğu belirlenmiştir. Bu aynı zamanda öğrencilerin rasyonel sayılar kümesini, birbiri ile ilişkisi olmayan kümelerin birleşimi olarak algıladıklarını ortaya koymaktadır. Bu eksikliklerin giderilmesi için öğretimi planlayacak olan öğretmenlere büyük görevler düşmektedir. Bunun için kesir ve ondalık kesirlerin birbirinden farklı sayılar olarak değil, aynı sayının birbirine dönüştürülebilen farklı gösterimleri olduğunun kavranmasına yönelik çalışmalar yapılmalıdır. Ayrıca bu konu ile ilgili olarak hazırlanacak öğretim materyallerinde öğrenci yanılgıların giderilmesine yönelik etkinliklere yer verilmesi gerekmektedir. Araştırmada özel durum çalışması kullanıldığı için küçük bir örneklem ile çalışılmıştır, dolayısıyla sonuçların genellenmesi mümkün değildir. Bu nedenle bu alanda araştırma yapacak araştırmalara farklı düzeyden alınacak öğrenciler ile ve daha geniş bir örneklem üzerinde çalışılması önerilmektedir. Bunun yanında soru setinin daha kapsamlı olarak hazırlanması, sayı doğrusu kullanımının öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlamada herhangi bir etkisi olup olmadığının belirlenmesi önerilmektedir.

Kaynakça

Aktaş, D. Y., & Cansız-Aktaş, M. (2012). Öğrencilerin Rasyonel Sayılar Kümesinin Yoğunluğunu Anlamaları. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(1), 103-110.

Alkan, R. (2009). "İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematik dersi rasyonel sayılar konusu ile ilgili hata ve kavram yanılgılarının analizi." Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Baki, A. (2006). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*(3. Baskı). Trabzon: Derya Kitabevi.

Balcı, M. (2008). *Matematik Analiz 1*. (7. Baskı) Ankara: Balcı Yayınları,

Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2008). Üniversite Mezunu Yetişkinlerde Sayı Kavramı. VIII. Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi 27-29 Ağustos 2008, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Bell, A. ve Baki, A. (1997). Ortaöğretim Matematik Öğretimi 1. Cilt, YÖK/Dünya Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi, Ankara.

Bilgin, T. ve Akbayır, K. (2002). Lise 1. Sınıf Öğrencilerinin Ondalık Sayıları Yorumlama ve Uygulamada Sahip Oldukları Kavram Yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 10 (1), 109-118.

Chi, M. T. H. & Roscoe, R. D. (2002). The Process and Challenges of Conceptual Change, In M. Limón and L. Mason (Eds.), Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice, Kluwer, Dordrecht.

Çepni, S. (2007). *Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş* (3. Baskı).Trabzon: Celepler matbaacılık.

Desmet, L., Gregoire, J. & Mussolin, C. (2010). Developmental changes in the comparison of decimal fractions. *Learning and Instruction*, 20, 521-532.

Doğan, M. ve Yeniterzi, B. (2011). İlköğretim 7. Sınıf Öğrencilerinin Rasyonel Sayılar Konusundaki Hazır Bulunuşlukları. *Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31, 217-237.

Durmuş, S. (2005). Rasyonel Sayılarda Bölme İşlemini İlköğretim Öğrencilerin Algılayışları. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9, 97-109.

Ekiz, D. (2003). *Eğitimde Araştırma Yöntem ve Metodlarına Giriş*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Giannakoulias, E., Souyoul, A. & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real number properties. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education*(pp. 416-425).Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus,

Gürbüz, R. ve Birgin, O. (2008). Farklı Öğrenim Seviyesindeki Öğrencilerin Rasyonel Sayıların Farklı Gösterim Şekilleriyle İşlem Yapma Becerilerinin Karşılaştırılması. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23, 85-94.*

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H. & Soro, R. (2006). Levels of student understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science, 4(2), 317-337.*

Kocaoğlu, T. ve Yenilmez, K. (2010). Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Kesir Problemlerinde Yaptıkları Hatalar ve Kavram Yanılgıları. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14, 71-85.

Malara, N. (2001). From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. In: J. Novotná (Ed.), *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education II* (pp. 35–46). Praga:Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická Faculta.

MEB (2005). Matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu, MEB Yayınları, Ankara.

MEB (2007). Ortaöğretim matematik 9. sınıf ders kitabı (2. Baskı), Devlet Kitapları, İstanbul.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In M. Limon, & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp.233-258). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Outlines for new teaching strategies. *Learning and Instruction*, 14, 519-534.

Merenluoto, K. & Palonen, T. (2007). When we clashed with real numbers: complexity of conceptual change in number concept. In S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Eds.), *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 247-263). Amsterdam: Elsevier.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes and breakers: New approaches to teaching the rational-number system. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.). *How students learn: Mathematics in the classroom* (pp. 121-162). Washington, DC: National Academic Press.

Ni, Y. & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.

O'Connor, M. C. (2001). Can any fraction turned into a decimal? A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics,* 46, 143-185.

Oğuz, A. (2007). Teoriden Pratiğe Örneklerle Fen Kavramlarının Oluşumuna Ait Kuramlara Bir Bakış. *Eğitim Bilim Toplum Dergisi,* 5(19), 26-51.

Özdemir, G. & Clark, D. B. (2007). An overview of conceptual change theories. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* 3(4), 351-361.

Pesen, C. (2007). Öğrencilerin Kesirlerle İlgili Kavram Yanılgıları. *Eğitim ve Bilim*, 32 (143), 79-88.

Pesen, C. (2008). Kesirlerin Sayı Doğrusu Üzerindeki Gösteriminde Öğrencilerin Öğrenme Güçlükleri ve Kavram Yanılgıları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9 (15), 157-168.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W. & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66, 211-227.

Soylu, Y. ve Soylu, C. (2005). İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusundaki Öğrenme Güçlükleri: Kesirlerde Sıralama, Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Kesirlerle İlgili Problemler. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 7 (2), 101-117.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). Students' understanding of numerical value of fractions: a conceptual approach. *Learning and Instruction,* 14, 503-518.

Strauss, A. & Corbin, J. (1990). Basics of Qualitative Research: Grounded Theory, Procedures and Tecniques, Newbury Park: Sage.

Thompson, C. A. & Opfer, J. E. (2008). Costs and benefits of representational change: Effect of context on age and sex differences in magnitude estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 101, 20–51.

Uslu, C. Ş. (2006). "İlköğretim 1. ve 2. Kademesi ile Ortaöğretim 10. Sınıf Öğrencilerinin Matematiğin Temel Kavramlarındaki Eksik ve Yanlış Öğrenmelerinin Karşılaştırılması." Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction,* 28 (2), 181-209.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach.*Learning and Instruction,* 14, 453-467.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constrains, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Eds.), *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265-282). Amsterdam: Elsevier.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L. & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction,* 21, 676-685.

Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction,* 14, 445-451.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and Instruction*, 4, 45–69.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (5. Baskı), Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yılmaz, Z. ve Yenilmez, K. (2009). İlköğretim 7. ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Ondalık Sayılar Konusundaki Kavram Yanılgıları (Uşak İli Örneği). *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(1), 269-289.