Eğitim ve Bilim
2012, Cilt 37, Sayı 165
Education and Science
2012, Vol. 37, No 165

Doğrusal ve İkinci Dereceden Örüntüleri Genelleştirme Stratejileri: 6-8. Sınıf Öğrencilerinin Karşılaştırılması

Generalization Strategies of Linear and Quadratic Pattern: A Comparison of 6th-8th Grade Students

Yaşar AKKAN* Ünal ÇAKIROĞLU**

Gümüşhane Üniversitesi Karadeniz Teknik Üniversitesi

Öz

Örüntülerin farklı biçimlerde temsil edilmesi, cebir'in temel kavramlarının oluşumuna katkı sağlamaktadır. Bu nedenle öğrencilerin farklı örüntü çeşitleriyle ilgili genelleştirme stratejilerinin irdelenmesi, daha sonraki cebir öğrenimi için önemlidir. Bu çalışmanın amacı, 6-8. sınıf öğrencilerinin doğrusal ve ikinci dereceden örüntülerle ilgili genelleştirme stratejilerini belirlemek ve karşılaştırmaktır. Araştırma 6, 7 ve 8. sınıfta öğrenim gören toplam 18 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Dört sorudan oluşan veri toplama aracından elde edilen veriler, daha önce yapılan araştırmalardaki genelleştirme stratejileri dikkate alınarak sınıflandırılmıştır. Sonuç olarak doğrusal ve ikinci dereceden örüntülerin tümünde, 6-8. sınıf öğrencilerinin öğrenim seviyesi arttıkça örüntü genelleştirme stratejilerindeki çeşitlilik ve doğru genellemeye ulaşma yeterliliklerinin arttığı görülmüştür. Öğrenciler genel olarak yinelemeli veya eklemeli stratejiyi kullanırken, fonksiyonel stratejiyi kullanan öğrencilerin sayısı oldukça azdır.

Anahtar Sözcükler: Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüler, genelleştirme stratejileri, 6-8. sınıf.

Abstract

Different representations of patterns have positive effects on the formation of the basis of algebra. Hence, it is important to investigate the strategies about pattern generalization for students' future learning about algebra. Thus, this study aims to define the generalizations about linear and quadratic patterns and also comparing the generalization strategies of 6th – 8th grades. The sample consisted of 18 students at 6th, 7th and 8th grades. The data collection tool has 4 problems and the collected data is classified through the generalization strategies in the related literature. The findings illustrate those at all linear and quadratic patterns, the variety and the correct generalization abilities are increasing due to the increasing of students' grades. Generally, most of the students used recursive or additive strategies, but only a few number of students used explicit strategies.

Keywords: Linear and quadratic patterns, generalization strategies, 6-8 grades

Summary

Dramatic changes in the field of mathematics education have been observed in the last few decades as is the case in many other fields. In that process of change, the approaches focused on high-level mathematical reasoning such as exploring, conjecturing, generalizing has taken the place of approach of rule of based mathematics instruction. Thus, new standards and curriculums have been developed and put into practice all around the world. Turkish education system has been affected by this process and Turkish mathematics elementary education curriculum has changed through new expectations by TME (Turkish Ministry of Education). "The patterns" in the new curriculum appeared as an important learning field. Many mathematics educators and organizations have expressed that studying with patterns could improve the students' algebraic

* Yrd. Doç. Dr. Yaşar AKKAN, Gümüşhane Üniversitesi, Matematik Müh., akkanyasar61@hotmail.com
** Yrd. Doç. Dr. Ünal ÇAKIROĞLU, Karadeniz Teknik Üniversitesi, BÖTE Bölümü, cakiroglu@ktu.edu.tr

concepts at early ages, and contribute for algebraic thinking required in the future learning. In these studies, it is observed that students' discovering of the relations that the patterns include and generalizing will help them in perceiving the world around them better. In addition, it is important to make the patterns be represented in different forms and to make them be expressed especially as symbolic. For this reason it is necessary to determine the patterns generalization efficiencies of elementary school students in mathematics. In this context, the purpose of this study is to compare and determine the different grade students' (6^{th}, 7^{th}, 8^{th}) generalization strategies of linear and quadratic number and shape patterns.

In this study, a case study that provides detail investigation around a specific case was use as research methodology. The sample of the study consists of totally 18 students from 6-8 th grade in Trabzon. These students were selected for clinical interviews through their previous academicals achievements, their communication skills and also their voluntariness. We also took under consideration about students' exemplifying the similar and different classifications. Data gathering tools were two linear and two quadratic pattern problems which were prepared by the support of mathematics teachers and the related literature. These problems were interpreted by the mathematics education experts in order to undergo expert review. Clinical interviews were conducted in order to define the strategies used for pattern problems. Data was interpreted and discussed through pattern generalization strategies in the literature.

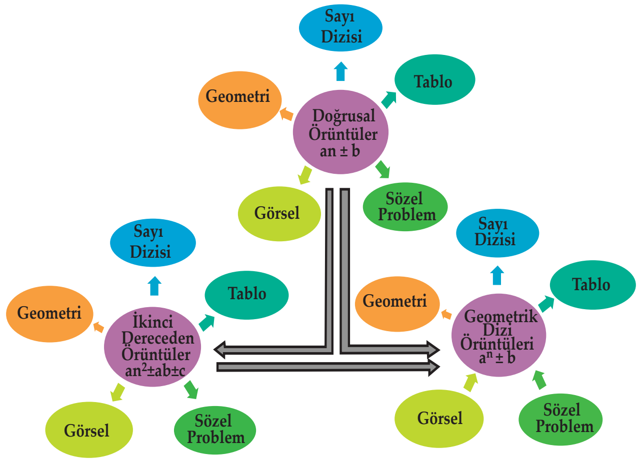
The findings illustrated that different grade students were using different solution strategies. The increase in grades from 6 to 8 brought positive developments in pattern generalizations. Though the students were in different grades, most of them generally used the "recursive or additive strategy", but only a few students used "explicit strategy". Nevertheless only five students preferred "recursive or additive strategy" in linear pattern problems, this strategy is used by ten students in quadratic pattern problems. This shows that, students also preferred "recursive or additive strategies" in non linear problems which is about the difference between consecutive terms and generally used in linear problems. So this triggered the failure of some students' generalizations. Generally students used the same strategies for four pattern problems, but 7^{th} and 8^{th} grade students changed their solution strategies through problems. By the increasing of the grades; even if a little; a transition was seen from "recursive, counting, whole-object, multiplying with difference, guess and check" to "contextual and explicit" strategies. Also there was a lack in the exploring the pattern rule and generalization at all grades whom used "recursive, counting, whole-object, multiplying with difference, guess and check" strategies. The different grade students were more successful in linear pattern generalization problems than the quadratic ones. Also they were more successful on generalization the number sequence pattern problems than the generalization shape pattern problems. Some of the 6-8th grade students found the pattern terms by writing the terms consecutively or by finding the difference between the terms and adding it in to the previous term. So these students were more successful on finding the near term instead of finding the far term. These findings about generalization refer to one of the most important dynamics of mathematics named as formulization which can be described as defining the pattern generalization by letters. Thus, it is important to teach formulization in primary school mathematics. Also, this case study showed that; 6^{th}, 7^{th}, and 8^{th} grades students were not at the expected level on generalization. It is known that; using letters for defining pattern generalization cannot be developed by the students themselves. This is also a transition process and they need support in this process. So it is necessary to see the real life generalization problems and to see different types of pattern problems for the students in primary school age. In addition, the findings of this study have an important implication for mathematics education that is: the teachers must address the generalization problems including different types of patterns and also make students to use different generalization strategies in their lessons in all grades of primary schools.

Giriş

Baki'ye (2008) göre belli bir durum veya olaydaki örüntüyü bulup bir düşüncede toplama işi olan genelleştirme, bu şekliyle aynı zamanda bir soyutlamadır. Lee'nin (1996) cebir'in ve gerçekte tüm matematiğin, ilişkilerin genelleştirilmesi olduğu görüşü, matematik öğretiminde genelleştirmenin önemini açıkça ortaya koymaktadır. Örüntüler alt öğrenme alanındaki ilişkileri ve genelleştirmeleri formüle etme, son yıllarda İngiltere ve ABD'de okul matematik müfredatlarında önemli bir yer tutmaktadır (NCTM, 2000; Zaskis and Liljedahl, 2002). Ülkemizde ise geliştirilen yeni ilköğretim matematik öğretimi programında örüntüler konusunun önemi: "Matematik, örüntülerin ve düzenlerin bilimidir… Örüntülerin içerdiği ilişkileri keşfetmeleri ve bunları genelleştirmeleri, öğrencilerin çevrelerindeki dünyayı daha iyi algılayabilme becerilerinin gelişmesine yardımcı olacaktır. Ayrıca örüntülerin farklı biçimlerde temsil edilmesi ve özellikle sembolik olarak ifade edilmesi cebir'in temel kavramlarının oluşmasına önemli katkılar sağlayacaktır (MEB, 2005: 7, 101)" şeklinde ifade edilmektedir.

Matematik eğitimi araştırmacıları örüntüler konusunu farklı açılardan ele almışlar ve öğrencilerin küçük yaşlarda örüntülerle tanıştırılmasının, örüntüler ile fonksiyon kavramı arasındaki ilişkiye değinilmesinin, problem çözme becerilerinin gelişimine, cebirsel düşünmeye ve cebir öğrenimine katkı sağlayacağı fikrinde birleşmişlerdir (Armstong, 1995; Bednarz, Kieran and Lee, 1996; English and Warren, 1998; Kenney and Silver, 1997; Lannin, 2005; NCTM, 2000; Orton and Orton, 1999; Stacey, 1989;). Örneğin Tall (1992) sayı örüntülerindeki aritmetik fikirleri genelleştirerek cebirsel fikirlere girmenin daha kolay olacağını ifade etmiştir. Armstong (1995), örüntüleri keşfetmenin erken yaşlardaki çocukların cebirsel düşünme yeteneklerini geliştireceğine vurgu yaparak, örüntülerden yararlanarak genelleştirme yapmanın cebir için önemine dikkat çekmiştir. Orton ve Orton (1999) örüntüleri, cebir'e ulaştıran bir yaklaşım olarak tanımlamıştır. NCTM' in cebir çalışma grubu ise çocukların erken yaşlarda cebirsel kavramları geliştirebileceğini, sayılar ve örüntülerle çalışmanın daha sonraki sınıflarda ihtiyaç duyulan cebirsel düşünme ve problem çözme için temel oluşturamaya yardım edebileceğini belirtmiştir (NCTM, 2000). Carpenter ve Levi (2000) de aritmetik ile cebir arasındaki ilişkiye değinmemenin erken yaşlarda öğrencileri matematiksel düşünmeden yoksun bırakacağına vurgu yaparak, ilköğretim seviyesinde bu ilişkiye önem verilmesini önermişlerdir. Bu bağlamda ilköğretim seviyesinde cebirsel düşünmeyi sağlamak için genelleme yapmanın ve sembol kullanımının önemine işaret etmişler ve cebirsel düşünmenin ancak aritmetikten cebire geçişin düzgün bir şekilde yürütülmesiyle sağlanacağını belirterek bu geçişte örüntülerin köprü rolü oynayabileceğini ifade etmişlerdir. Smith (2003), örüntüler, fonksiyonlar ve cebir arasındaki ilişkiye vurgu yaparak, öğretim programlarında bu üç konunun entegrasyonunun sağlanması gerektiğini savunmuştur. Yine birçok çalışmada formal cebir'in öncüsü olan cebirsel düşünmenin temelini kurmak için örüntü ve ilişkileri tanıma, ifade etme, genelleştirme ve sembolleştirmenin önemine vurgu yapılmıştır (Healy and Hoyles, 1999; Mason, Johston-Wilder and Graham, 2005; Schliemann et al., 2003; Zazkis and Liljedahl, 2002).

Ayrıca örüntülerin; doğrusal(lineer) ve doğrusal olmayan (ikinci dereceden ve geometrik dizi) örüntüler, sayısal örüntüler, resimli örüntüler, aritmetik örüntüler, geometrik örüntüler ve tekrarlı örüntüler gibi birçok çeşidinin örüntü genelleştirme ile ilgili çalışmalarda yer aldığı görülmektedir (Akkan ve ark., 2008c; Amit and Neria, 2008; Bishop, 2000; Feifei, 2005; Healy and Hoyles, 1999; Lanin, 2005; Ley, 2005; Orton and Orton, 1999; Rivera, 2007). Bu çalışmalar içerisinde özellikle Ley(2005) ve Feifei (2005)'in farklı örüntü çeşitlerine ait formatlara yönelik sınıflamaları ile ilgili çalışmalar önemlidir. Ley (2005), birinci dereceden örüntüleri görsel, geometrik, tablo, sayı dizisi ve sözel problem olarak beş değişik formatta sunmuştur. Feifei (2005) ise Şekil 1' deki gibi üç farklı örüntü çeşidi tanımlamış- doğrusal, ikinci dereceden ve geometrik dizi örüntüleri- ve bunların beş değişik formatına işaret etmiştir.

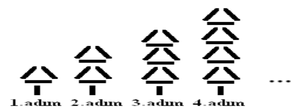


Şekil 1. Farklı Örüntü Çeşitlerini İçeren Formatlar

Fakat MEB'in ilköğretim 6-8. sınıf ile ilgili öğretim programından ve ülkemizdeki araştırmalardan, örüntülerin genellikle Tablo 1'deki gibi doğrusal ve ikinci dereceden örüntü çeşitlerinin sayı dizisi ve şekil (geometrik ve görsel) formatında sunulan çeşitlerinin daha çok yer aldığı görülmektedir.

Tablo 1

Doğrusal ve İkinci Dereceden Örüntü Çeşitleri ve Örnekleri

Örüntü Çeşitleri (Harfli İfadesi)	Formatlar Sayı Dizisi	Şekil
Doğrusal Örüntüler (a.n ± b)	3, 7, 11, 15, … (4.n – 1)	 … … (3.n + 1)
İkinci Dereceden Örüntüler (a.n² ± b.n ± c)	2, 6, 12, 20, … ($n^2 + n$)	 … (n^2)

Bununla birlikte ilköğretimden üniversite seviyesine kadar farklı örüntüleri genelleştirme ile ilgili araştırmaların içerisinde örüntüleri genelleştirme stratejilerini içeren araştırmalar merkezi konumdadır. Stacey (1989), 9-13 yaşındaki öğrencilerin doğrusal örüntülerde "parçaları sayma veya modelleme (counting), orantı (whole-object or direct proportion), fark (difference) ve doğrusal (linear)" genelleştirme stratejilerini kullandıklarını belirtmiş, Garcia-Cruz ve Martion(1997) ise stratejileri doğalarına göre "görsel (visaul), sayısal (numeric) ve görsel-sayısal (mixed)" olarak sınıflamıştır. Orton ve Orton (1999) 10-13 yaşlarındaki öğrencilerin doğrusal ve ikinci dereceden örüntü problemlerinde genellikle "yinelemeli" stratejiyi tercih ettiklerini belirtmiştir. Swafford ve Langrall (2000) ve Ley (2005), ilköğretim öğrencilerinin "yinelemeli, orantı ve fonksiyonel (kesin) (explicit)" stratejileri kullandıklarına vurgu yapmışlardır. Lanin (2005) doğrusal örüntü genelleştirme ile ilgili 6. sınıf öğrencilerinin stratejilerini fonksiyonel (kesin) olmayan (parçaları sayma veya modelleme, yinelemeli) ve fonksiyonel (kesin) (orantı, tahmin ve kontrol (quess and check), içeriksel (contextual)) şeklinde ikiye ayırmıştır. Amit ve Neria (2008) ise ilköğretim öğrencilerinin (12-14 yaş) doğrusal ve doğrusal olmayan örüntü problemlerini genelleştirme stratejilerine odaklanmış, öğrencilerin yerel (local) genelleştirmeler için "yinelemeli veya eklemeli (additive)" stratejiyi, genel (global) genelleştirme için fonksiyonel stratejiyi kullandıklarını belirtmişlerdir.

Yukarıdaki çalışmalardan da anlaşılacağı üzere çoğu çalışma doğrusal örüntüler üzerinedir. Sadece birkaç çalışma doğrusal olmayan örüntülerle ilgilidir (Amit and Neria, 2008; Ebersbach and Wilkening, 2007; Krebs, 2003; Rivera, 2007; Steele and Johaning, 2004). Bu çalışmalarda araştırmacılar, öğrencilerin doğrusal olmayan örüntülerde tıpkı doğrusal örüntülerde olduğu gibi genel olarak "yinelemeli veya eklemeli" stratejileri kullandıklarını ve bu stratejilerin de öğrencileri başarısızlığa sürüklediğini belirtmişlerdir. Örneğin Lanin, Barker ve Townsend (2006)'in 5. sınıf öğrencilerinin doğrusal ve doğrusal olmayan örüntüleri genelleştirme strateji seçimlerini etkileyen faktörleri belirlemeye yönelik çalışmalarında, stratejileri "parçaları sayma veya modelleme, yinelemeli, yığmalı (chunking), orantı ve fonksiyonel" olarak sınıflandırmışlardır.

Özetle örüntülerin içerdiği ilişkileri keşfetmeleri ve bunları genelleştirmeleri, öğrencilerin çevrelerindeki dünyayı daha iyi algılayabilme becerilerinin gelişmesine yardımcı olmaktadır. Ayrıca örüntülerin farklı biçimlerde temsil edilmesi ve özellikle sembolik olarak ifade edilmesi, aritmetikten cebire geçişe, cebirsel düşünmeye ve cebir'in temel kavramlarının oluşmasına önemli katkılar sağlamaktadır. Bu nedenle Türkiye'de yeniden yapılandırılan ilköğretim matematik öğretimi programında öğrencilerin farklı örüntü çeşitleriyle ilgili genelleştirme stratejilerinin irdelenmesi daha sonraki cebir öğrenimleri için önemlidir. Bu çalışmanın amacı, "6-8. sınıf öğrencilerinin doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejilerini belirlemek ve karşılaştırmaktır.''

Bu amaç doğrultusunda araştırmanın problemleri şöyle belirlenmiştir:

1. 6-8. sınıf öğrencilerin doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri nelerdir?
2. 6-8. sınıf öğrencilerinin doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri arasında farklılıklar var mıdır?

Yöntem

Bu çalışma, belirlenmiş bir özel durum etrafında derinlemesine inceleme imkânı sağlayan özel durum çalışmasıdır.

Örneklem

Çalışmanın örneklemini, 2008-2009 eğitim öğretim yılı ikinci yarıyılında Trabzon İli'ndeki bir ilköğretim okulun 6-8. sınıflarında öğrenim gören toplam 18 öğrenci oluşturmaktadır. Klinik mülakatlar için seçilen bu 18 öğrenci Matematik, Türkçe, Rehber öğretmenlerinin ve okul yöneticilerinin tavsiyeleri doğrultusunda, benzer ve farklı sınıflandırmaları temsil edecek şekilde ve başarı durumları dikkate alınarak seçilmiştir. Başarı durumunun dikkate alındığı seçme aşamasında, öğretmenden öğrencilerin bir yıl önceki matematik dersinden aldığı notlar istenmiştir. Daha sonra bu öğrenci notları üç gruba ayrılmıştır. İyi düzeydeki öğrenciler 80-90 ile 90-100 arası notlardan, orta düzeydeki öğrenciler 50-65 ile 65-80 arası notlardan ve zayıf düzeydeki öğrenciler ise 0-25 ile 25-50 arası notlardan seçilmiştir. Bunun yanında öğrenci seçiminde öğrencilerin SBS puanları da dikkate alınmıştır. Ayrıca Türkçe ve Rehber öğretmenlerinin tavsiyesi ile öğrenci seçimlerinde düşüncelerini rahatlıkla ifade etme becerisine sahip ve çalışmaya katılmaya gönüllü öğrenciler tercih edilmiştir. Bu bağlamda araştırmanın yapıldığı örneklem Tablo 2'deki gibidir.

Tablo 2.

Çalışmanın Örneklemi

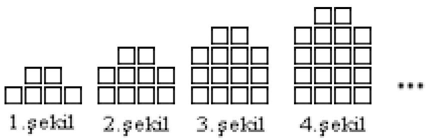
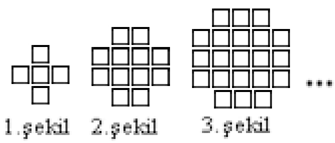
Sınıflar	Seçilen Öğrencilerin Özellikleri ve Sayıları		
	Zayıf	Orta	İyi
6.Sınıf	2 (Ö1-$_{6z}$, Ö2$_{-6z}$)	2 (Ö3$_{-6o}$, Ö4$_{-6o}$)	2 (Ö5$_{-6i}$, Ö6$_{-6i}$)
7.Sınıf	2 (Ö7$_{-7z}$, Ö8$_{-7z}$)	2 (Ö9$_{-7o}$, Ö10$_{-7o}$)	2 (Ö11$_{-7i}$, Ö12$_{-7i}$)
8.Sınıf	2 (Ö13$_{-8z}$, Ö14$_{-8z}$)	2 (Ö15$_{-8o}$, Ö16$_{-8o}$)	2 (Ö17$_{-8i}$, Ö18$_{-8i}$)

Veri Toplama Araçları

Veri toplama araçları, hem literatür hem de öğretmen desteğiyle hazırlanan ve farklı seviyelerdeki öğrencilerin çözüm üretebildiği doğrusal ve ikinci dereceden örüntü problemleridir (English and Warren, 1998; Feifei, 2005; Ley, 2005; Orton and Orton, 1999; Stacey, 1989). Çünkü yukarıda da ifade edildiği üzere, MEB'in ilköğretim 6-8. sınıf ile ilgili öğretim programından ve ülkemizdeki araştırmalardan, örüntülerin genellikle doğrusal ve ikinci dereceden örüntü çeşitlerinin sayı dizisi ve şekil (geometrik ve görsel) formatında sunulan çeşitlerinin daha çok yer aldığı görülmektedir. Hazırlanan veri toplama aracında bulunan problemlerin ölçme amacına uygun olup olmadığı, ölçülmek istenen alanı temsil edip etmediği "uzman görüşüne" göre saptanır (Karasar, 1996). Bunun için önce bir grup uzman tarafından ölçme amaçları ve bu amaçların gerektirdiği içerik çözümlemeleri yapılarak hazırlanmış problemlerin bu amaçları ve içeriği temsil edip edemeyeceği tartışılmıştır. Bu amaç doğrultusunda hazırlanan problemler üç matematik öğretmenine ve iki matematik eğitimcisine gösterilerek önerileri doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Bu açıdan hazırlanan soruların dil, seviye ve kapsam geçerliliği sağlanmıştır. Bu problemlerin ilk ikisi doğrusal örüntü problemi iken, diğer ikisi ikinci dereceden örüntü problemidir. Ayrıca her problem kendi içinde dörde ayrılmıştır: Takip eden ilk terimi bulma, 10. terimi bulma, 40. terimi bulma ve n. terim için bir harfli ifade yazma. Bu problemler ve özellikleri Tablo 3' te sunulmuştur.

Tablo 3.

Problemlerin İçerikleri ve Özellikleri

	Sayı Dizisi Örüntü Problemi	Şekil Örüntü Problemi
	1. Problem	2. Problem
Doğrusal Örüntü Problemleri	5, 7, 9, 11, … Yukarıdaki sayılar bir örüntü oluşturacak şekilde belli bir kurala göre dizilmiştir. Buna göre, a) Örüntüyü oluşturan 5. terimi bulunuz. b) Örüntüyü oluşturan 10. terimi bulunuz. c) Örüntüyü oluşturan 40. terimi bulunuz. d) Örüntünün kuralını yazılı olarak ifade ederek, örüntünün n. terimi için harfli bir ifade yazınız ve açıklayınız.	 Yukarıda benzer karelerden oluşan bir şekil örüntüsü verilmiştir. Buna göre: a) 5. şekildeki kare sayısını bulunuz. b) 10. şekildeki kare sayısını bulunuz. c) 40. şekildeki kare sayısını bulunuz. d) Örüntünün kuralını yazılı olarak ifade ederek, n. şekildeki kare sayısı için harfli bir ifade yazınız ve açıklayınız.
	3. Problem	4. Problem
İkinci Dereceden Örüntü Problemleri	2, 5, 10, 17 … Yukarıdaki sayılar bir örüntü oluşturacak şekilde belli bir kurala göre dizilmiştir. Buna göre, a) Örüntüyü oluşturan 5. terimi bulunuz. b) Örüntüyü oluşturan 10. terimi bulunuz. c) Örüntüyü oluşturan 40. terimi bulunuz. d) Örüntünün kuralını yazılı olarak ifade ederek, örüntünün n. terimi için harfli bir ifade yazınız ve açıklayınız	 Yukarıda benzer karelerden oluşan bir şekil örüntüsü verilmiştir. Buna göre: a) 4. şekildeki kare sayısını bulunuz. b) 10. şekildeki kare sayısını bulunuz. c) 40. şekildeki kare sayısını bulunuz. d) Örüntünün kuralını yazılı olarak ifade ederek, n.şekildeki kare sayısı için harfli bir ifade yazınız ve açıklayınız.

Verilerin Analizi

Öğrencilerin farklı örüntüleri içeren problemlerde kullandıkları stratejileri belirlemek amacıyla öğrencilerle klinik mülakatlar yürütülmüştür. Klinik mülakat, öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmelerdir. Bu mülakat çeşidinin esas amacı, bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini tespit etmek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Zazkis and Hazzan, 1999). Mülakat ile öğrencilerden; etkinlik kartlarındaki görevi yerine getirmeleri (bu şekilde öğrencilerin kullandıkları stratejiler ve düşünme biçimleri tanımlanmıştır), her bir görev için cevaplarının ne olduğunu ve bu cevaba nasıl ulaştıklarını açıklamaları (sesli düşünme protokolü), ihtiyaç duyulan ek soruları cevaplamaları ("Bunu nasıl yaptın?", "Nasıl düşündün?", "Niçin?" ve "Neden?" gibi sorularının yanında problemin içeriği ile ilgili ek sorular) beklenmiştir. Ayrıca nitel veriler sunulurken katılımcı öğrencileri ve araştırmacıyı nitelemek için "Ö1-$_{6z}$, Ö2$_{-6z}$, …, Ö17$_{-8i}$, Ö18$_{-8}$, A [A:Araştırmacı]" şeklinde takma isimler kullanılmıştır. Yine bu kısımda klinik mülakatlar sırasında araştırmacı ve öğrenciler arasında geçen karşılıklı diyaloglardan doğrudan alıntılara, okuyucuya betimsel ve gerçekçi bir resim sunmak ve kendi yorumlarını yapma fırsatı vermesi açısından yer verilmiştir.

Elde edilen veriler, literatürde daha önce yapılan araştırmalardaki (Amit and Neri, 2008; Ebersbach and Wilkening, 2007; Garcia-Cruz and Martion, 1997; Krebs, 2003; Lanin, 2003, 2005; Lannin, Barker and Townsend, 2006; Ley, 2005; Orton and Orton, 1999; Rivera and Becker, 2005; Stacey,1989; Swafford and Langrall, 2000; Steele and Johaning, 2004) örüntü genelleştirme stratejileri dikkate alınarak oluşturulan Tablo 4' e göre sınıflandırılmış ve tartışılmıştır.

Tablo 4.

Genelleştirme Stratejilerini İçeren Çatı

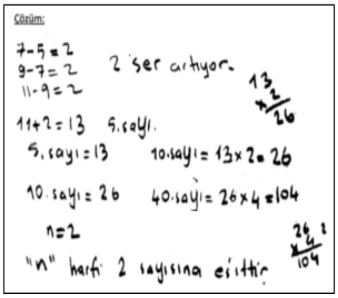
Stratejiler	Özellikleri
Parçaları sayma veya modelleme (Counting)	Bir şekli oluşturan parçaların sayısını hesaplamayı ya da arzu edilen niteliği hesaplamak için durumu resmeden bir model yapılandırmayı veya bir şekil çizmeyi içerir.
Yinelemeli veya Eklemeli (Recursive or Additive)	Gelecek terimleri veya terimi bulmak için örüntüdeki önceki terimin kullanımını içerir. Öğrenciler genellikle iki terim arasındaki farkı bulmaya çalışır ve gelecek terimi bulmak için elde ettikleri farkı son terime eklerler. Bu işlem yinelemeli ve eklemeli olarak devam ettiğinden eklemeli strateji olarak da adlandırılır.
Fark ile çarpma (Multipliying with difference)	Dizideki ardışık iki terim arasındaki fark ile çarpmayı içerir. Özellikle doğrusal ilişkilerin genellemesinde ortaya çıkan bu durumda, öğrenci terimler arasındaki sabit farkın farkındadır. n. terimi farkla n'nin çarpılması şeklinde ifade eder. Bu yaklaşım 3, 6, 9, … şeklindeki bir dizi için geçerli (3n) iken, 3, 7, 11, … şeklindeki bir dizi için geçersiz (4n) olacaktır.
Orantı (Whole-Object or Proportion)	Bu strateji örüntü problemlerini çözmede orantılı akıl yürütmenin kullanımını içerir. Lannin (2003: 343) bu stratejiyi "birimlerin katlarını kullanarak daha geniş bir birim yapılandırmak için bir birim olarak bir parçayı kullanma" olarak tanımlar. Örneğin; 3 elma 9 TL ise 9 elma 24 TL' dir.
Tahmin ve Kontrol (Guess and Check)	Kuralın işleyip işlemediğine bakmaksızın, bir kural tahminini içerir. Problem durumunu temsilen bir cebirsel ilişki (kural) ortaya koyulur. Öğrenci ortaya koyduğu kuralın süreç boyunca geçerliliğini düşünmez. Oluşturduğu cebirsel yapı genellikle problem durumu ile ilgili sayıları ve işlemleri içerir.
İçeriksel (Contextual)	Durumu sağlayan bilgiye yani içeriğe odaklı bir kural veya formül yapılandırmayı içerir. Bu kural veya formül hesaplama tekniği ile ilişkili bir kuraldır.
Fonksiyonel veya kesin (Explicit)	Bu strateji herhangi bir değeri belirleyebilmek için iki değişken arasındaki ilişkiyi genelleştirmeyi içerir. Bu strateji denklemleri ve formülleri kullanarak fonksiyonları belirlemeye doğru aşamalı bir ilerlemenin ilk adımıdır. Bu strateji kullanıldığında hem uzak hem de yakın terimler için değişmeyen ve uygulanabilir olur. Bundan dolayı bu strateji n.terimi bulmaya ve genel bir kural yazmaya imkân verir.

Bulgular

Çalışmanın bu bölümünde, 6-8. sınıf öğrencilerinin genelleştirme stratejilerini belirlemek için kullanılan klinik mülakatlardan elde edilen veriler, sırasıyla farklı örüntü çeşitlerine göre sunulmuştur. Ayrıca öğrencilere ait klinik mülakatlar ile çözüm örneklerine, okuyucuya betimsel ve gerçekçi bir resim sunma ve kendi yorumlarını yapma fırsatı vermesi açısından yer verilmiştir.

Doğrusal Sayı Dizisi ve Şekil Örüntülerini Genelleştirme Stratejileri

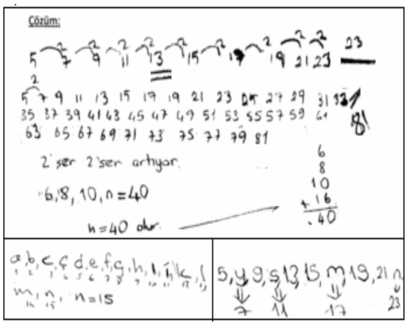
Ö1-6z, Ö8-7z ve Ö14-8z öğrencileri doğrusal şekil örüntü problemini sayı dizisi örüntü problemine çevirmiş, her iki problemde de ilkönce iki veri arasındaki farkı belirlemiş ve bu fark yardımıyla 5. terimi doğru olarak bulmuştur. Fakat öğrenciler bu farktan, beşinci terimden ve "orantı" stratejisinden yararlanarak 10. ve 40. terimler için yanlış değerler bulmuştur. Öğrenciler, sadece iki veri arasındaki farkı kural olarak algılamış, kural yazmaya gerek olmadığını belirtmiş ve sayılar arasındaki farkı bilmenin her sayıyı bulmak için yeterli olacağını ifade etmişlerdir. Bu öğrenciler genel olarak yerel genelleştirmeleri yapabilmişlerdir.



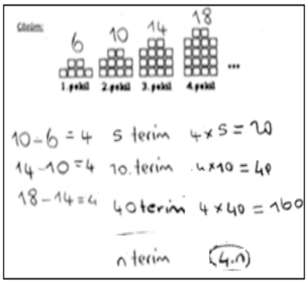
Ö1-6z: O halde 4. sayı 11 ise 5.sayı 13 olur…5. sayı 13 ise 10.sayı 26 olur. [A: Niçin 26 oldu?]… 5. sayı 13 ise, 10.sayı beşincinin 2 katı olur. Çünkü 10, 5'in 2 katıdır. [A: Ya, 40. sayı?]… O da 10. sayının dört katı olur, 26 ile 4'ü çarpalım. Sonuç 84 olur. [A: Peki nasıl bir kural var?]… İkişer artan bir örüntü, yani her sayı diğerinden iki fazla. [A: n.sayı ne olur?]… n. sayı 2 olur. [A: Niçin?] Sonuçta bir sayı bulmalıyız. Sayılar hep ikişer artıyor.

Ö8-7z: 5. şekilde 22 kare varsa 10. şekilde 44 kare vardır. [A: Niçin 44 oldu?]… 5. şekil 22 ise,10. şekil, 5.şeklin 2 katı olur. Çünkü 10, 5'in 2 katıdır. [A: 40. sayı?]… Tamam, o da 10. şeklin dört katı olacağından 44 ile 4'ü çarpalım. Sonuç 174 olur.

Ö1-6z, Ö8-7z ve Ö14-8z öğrencileri doğrusal şekil örüntü problemini sayı dizisi örüntü problemine çevirmiş, her iki problemde de ilkönce iki veri arasındaki farkı belirlemiş ve bu fark yardımıyla 5. terimi doğru olarak bulmuştur. Fakat öğrenciler bu farktan, beşinci terimden ve "orantı" stratejisinden yararlanarak 10. ve 40. terimler için yanlış değerler bulmuştur. Öğrenciler, sadece iki veri arasındaki farkı kural olarak algılamış, kural yazmaya gerek olmadığını belirtmiş ve sayılar arasındaki farkı bilmenin her sayıyı bulmak için yeterli olacağını ifade etmişlerdir. Bu öğrenciler genel olarak yerel genelleştirmeleri yapabilmişlerdir.

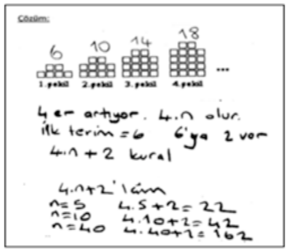


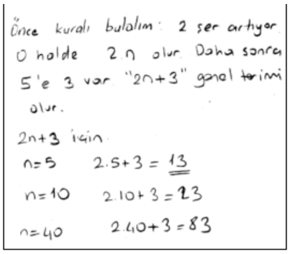
Ö5-6i öğrencisi hem doğrusal sayı dizisi örüntü probleminde hem de şekil örüntü probleminde örüntülerin terimleri arasındaki farkları bulmuş, elde ettiği farklar ile istenilen terimleri çarparak sonuçlara ulaşmaya çalışmıştır. Ö5-6İ öğrencisi, iki veri arasındaki fark ile terimleri çarparak genelleme yapmaya çalıştığından, bu öğrencinin stratejisi "fark ile çarpma" stratejisidir.



Ö5-6i: Önce şekillerdeki kareleri sayalım. 6, 10, 14, 18, … Sayılar arasında hep dört fark var. O halde bundan sonra gelecek sayılarda 4 ün katları olacak. [A: Niçin 4ün katları?]… Örüntü olması için. Zaten eşit olmazsa diğer sayıları bulamayız. O halde sorudaki "5.sayı", 4 × 5 = 20 olur, "10.sayı" 4 × 10 = 40 olur. [A: Ya, 40. sayı?]… Tamam o da 40'ın 4 katı olacağından 160 olur. [A: Nasıl bir kural yazılabilir?]…Farkı 4 olan bir örüntü, yani her sayı diğerinden dört fazla... O halde n. sayıda "4 × n" olur.

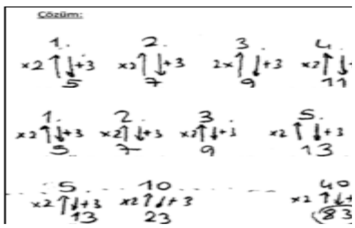
Ö16-8o öğrencisi doğrusal şekil örüntü problemini çözerken bu çeşit problemlerin çözümünde kullanılan bir formül öğrendiğini ifade etmiş ve bu formül yardımıyla bu probleme cevap verebileceğini belirtmiştir. Burada Ö16-8o öğrencisi bilinen sayısal bir değer yerine harfli sembolleri içeren ve daha önceden oluşturmaya aşina olduğu bir formül yardımıyla problemi çözmeye çalışmış yani "içeriksel" stratejiyi kullanmıştır. Fakat öğrencinin, iki değişken (terim ile terim yeri) arasında ilişkilendirme yaparak oluşturduğu formülün sınırları hakkındaki bilgisi kavramsal düzeyde değildir. Aynı şekilde her iki problem için Ö11-7i öğrencisi de, Ö16-8o öğrencisi gibi daha önceden alışık olduğu bir formülü kullanarak genelleme yapmaya çalışmıştır. Bu öğrenciler her ne kadar ezber bir kural ile genelleştirme yapmaya çalışsalar da doğru genelleştirmelere ulaşmışlardır.



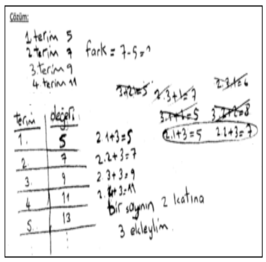


Ö16-8o: Bir sayı dizisi ve aritmetik dizidir. [A: Neden?] Sayılar arasındaki fark hep sabit kalıyor… Sorulan terimleri tek tek bulmaktansa n.terim'i içeren bir formül kullanalım. [A: Nasıl bir formül?] Daha önce öğrenmiştik. Terimler ile sayılar arasındaki ilişkiden çıkarılıyor bu formül… Fark 2 olduğundan 2 ile n çarpalım. [A: Ama soruda 5., 10, ve 40, terimleri soruyor?]… Genel bir formül yazarsak bütün terimlerin değerlerini buluruz… 2 ile n'in çarpımı 2.n olur. Şimdi ilk terime bakalım. İlk terim 5 olduğundan 2'ye hangi sayıyı ekleyeyim ki 5 etsin. [A: Neden böyle yapıyorsun?]… Formül öyle oluşuyor da ondan… Demek ki sayı 3. Şimdi 2.n ile 3 toplayayım. O halde bu örüntünün formülü "2.n + 3" olur.

Yandaki çözümde de görüldüğü gibi, Ö9-7o öğrencisi doğrusal sayı dizisi örüntü probleminde "okları" içeren bir kural ile genelleme yapmaya çalışmıştır. Bu öğrenci genellemelerini harfli ifadelerle veya cebirsel olarak değil, kelimelerle ifade etmiştir. O halde bu öğrencinin de çözüm stratejisi "içeriksel" stratejidir.



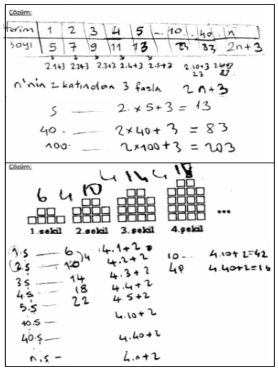
Ö15-8o öğrencisi doğrusal sayı dizisi örüntü probleminde tablo gösterimini kullanarak terim ve terimin değeri arasındaki ilişkilere odaklanmış ve birkaç denemeden sonra tahminde bulunmuş, yani tahmin ve kontrol yaparak uygun kuralı sözlü olarak ifade etmiş, fakat kuralı cebirsel olarak ifade edememiştir. Benzer şekilde Ö10-7o öğrencisi de Ö15-8o gibi "tahmin ve kontrol" stratejisinden yararlanarak doğrusal sayı dizisi örüntü problemini çözmüştür. Bununla birlikte her iki öğrenci de doğrusal şekil örüntü probleminde şekillerdeki karelerin sayısını dikkate alarak bir sayı dizisi örüntüsü oluşturmuş, daha sonra "tahmin ve kontrol" stratejisinden ve tablodan yararlanarak genelleme yapmaya çalışmış, fakat genellemeyi cebirsel olarak yazamamıştır.



Ö15-8o: Terimler ile sayılar arasındaki ilişkiyi bulabilirsem tüm terimlerin sayı değerlerini bulabilirim. Bir tablo çizelim, bir satıra terim, diğer tarafa ona karşılık gelen değeri. [A: Amacın ne?].Düzenli işlem yapmak. Mesela sayılar arasındaki fark olan 2 ile 1'i kullanarak 5 sayısını elde etmeliyiz. Ama bu bulacağımız kural hepsini sağlamalı. [A: Bunu nerden biliyorsun?] …Kural öyle.

….[Öğrenci burada kağıt üzerine birkaç deneme-kontrol yaptıktan sonra ve diğerlerinde de denedikten sonra doğru ifadeyi buldu]…

Ö15-8o: O halde 5 sayısı 1'in 2 katından 3 fazladır. Demek ki kural iki ile çarpımının 3 fazlasıdır. [A: Tamam, n. terimi bulabilir misin?]. n sayı değil ki harf, biz burada örüntüdeki sayı değerlerini buluyoruz. [A: Nasıl yani?]… Mesela 100. terimi isteseler 100 ile 2 çarparız ve 3 ekleriz. Yani 203 olur. Yani hep sayısal değer buluruz… O halde şöyle yazabiliriz; "herhangi bir sayının 2 ile çarpımına 3 ekle."



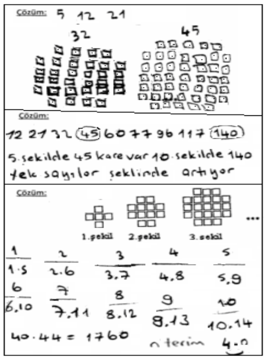
Bununla birlikte Ö6-6i, Ö12-7i, Ö17-8i ve Ö18-8i öğrencileri iki değişken olan terim ile terim yeri arasındaki ilişkiden yararlanarak oluşturdukları formüller hakkında kavramsal bilgiye sahiptirler. Bu öğrencilerden Ö17-8i öğrencisi yandaki şekilde de görüldüğü gibi bir tablo yardımıyla ve iki değişken arasındaki ilişkiden yararlanarak örüntünün genel terimini "2.n+3" şeklinde tanımlamıştır. Bu öğrencilerin hepsi "fonksiyonel veya kesin" strateji yardımıyla genel terimleri cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Benzer şekilde Ö12-7i öğrencisi de doğrusal şekil örüntü problemini sayı dizisi örüntü problemine çevirmiş, elde ettiği sayılarla alt alt oluşturduğu bir çizelge yardımıyla terim ve terim yeri arasındaki ilişkiyi belirlemiş ve genel terim için "4.n+2" ifadesini yazmıştır. Fakat S66 öğrencisi doğrusal şekil örüntü probleminde terim ile terim sayısından yola çıkarak oluşturduğu genellemeyi " 2 × terim + 3" şeklinde ifade etmiştir.

İkinci Dereceden Sayı Dizisi ve Şekil Örüntüleri Genelleştirme Stratejileri

Bu bölümde ise ikinci dereceden sayı dizisi ve şekil örüntüleri içeren problemlerinden elde edilen veriler sırasıyla öğrencilerin çözüm stratejilerine göre sunulmuştur.

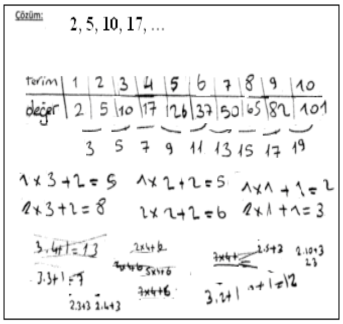
Ö2-6z öğrencisi ikinci dereceden şekil örüntü problemini sayı dizisi örüntü problemine çevirmiş, her iki örüntü probleminde de iki terim arasındaki farktan yararlanarak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Burada Ö2-6z öğrencisi sadece aradaki farkın eşit olduğu örüntü çeşitlerinin var olduğunu belirtmiş ve iki probleme de herhangi bir cevap verememiştir.

Ö2-6z: Sayılar arasındaki farkı bulalım, 3, 5, 7, … bu örüntü mü, anlamadım? [A: Niçin örüntü olmasın?]… Sayılar arasındaki farklar eşit değil. O halde örüntü değil… Ama birkaç tane işlem yapayım… Olmuyor bir türlü sonucu bulamıyorum. [A: Tamam diğer soruya bakalım.]… Önce kareleri sayalım, 5, 12, 21,.. Bu da örüntü değil. Çünkü farklar eşit değil. [A: Her zaman aynı sayıda mı artar?]… Evet. [A: Niçin?]… Örüntü olması için. Dedim ya eşit olmazsa diğer sayıları bulamayız ki. Ama şekil çizelim ve sayalım..



Ö3-6o öğrencisi ikinci dereceden sayı dizisi örüntü probleminde sayısal gösterimleri içeren ve iki terim arasındaki farka odaklı olan "yinelemeli veya eklemeli" stratejiyi adapte etmeye çalışmış, sadece yerel genelleştirmeleri yapmıştır. Aynı öğrenci ikinci dereceden şekil örüntü probleminde ise görsel (visual) gösterimleri içeren "parçaları sayarak modelleme" stratejisini kullanmış, karelerin sayılarını her bir örüntünün üzerine yazarak sadece takip eden ilk terimi bulmuştur. Benzer şekilde Ö7-7z ve Ö14-8z öğrencileri de Ö3-6o öğrencisi gibi "yinelemeli ve parçaları sayma veya modelleme" stratejilerini kullanmışlardır. Ö4-6o öğrencisinin ikinci dereceden şekil örüntü problemine ait yandaki çözümdeki gibi, Ö5-6i, Ö6-6i, Ö8-7z, Ö9-7o, Ö13-8z ve Ö15-8o öğrencileri de Ö3-6o, Ö7-7z ve Ö14-8z öğrencilerinden farklı olarak şekil örüntüsünü sayı dizisi örüntüsüne çevirmişler ve örüntüyü oluşturan sayıların ardışık tek sayıları içeren bir yapıda olduğunu belirtmişlerdir. Bu öğrenciler tıpkı ikinci dereceden sayı dizisi örüntü problemindeki gibi sayısal gösterimleri içeren "yinelemeli veya eklemeli" stratejiyi kullanmışlardır. Ö5-6i ikinci dereceden şekil örüntü probleminde ise öğrenci, terim ile terim değeri arasındaki farktan yararlanarak sonuca ulaşmaya çalışmış ve işlemsel düzeyde belirlenen bu fark ile öğrenci 40. terimi doğru bulmuştur.

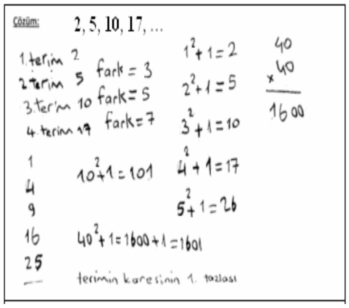
Ö10-7o öğrencisi ikinci dereceden örüntü problemlerinin her ikisinde de tablo gösterimini kullanarak terim ve terimin değeri arasındaki ilişkilere odaklanmış, fakat birçok tahmin-deneme-kontrol yapmasına rağmen kuralı sözlü veya cebirsel olarak ifade edememiştir. Öğrenci tablodan problem çözme aracı olarak faydalanmış, ama 10. terime kadar- ki terimleri bulmuştur. Öğrenci ikinci dereceden sayı dizisi örüntü problemi için yandaki açıklamayı yaparak etkinlik kartına yandaki çözümü yazmıştır. Bu da öğrencinin "tahmin ve kontrol" stratejisini kullanma eğiliminde olduğunu göstermiştir.



Ö10-7o: Örüntünün terimleri sırasıyla 2, 5, 10, 17… Terimler ile değerleri arasındaki ilişkiyi bulursak problem çözülür. Önce tablo çizelim. Bu tarafa terim, diğer taraf değeri. 1'e karşılık 2, 2'e karşılık 5, 3'e karşılık 10 ve 4'e karşılık 17 gelir. [A:: Neden tablo çizdin?]… Problemdeki kuralı daha iyi görmek için… Sayılar arasındaki fark bulup kural elde etmek. Ama kural hepsini sağlamalı… Şimdi farkı bulalım, 3, 5, 7, …Fakat fark aynı değil…[A: Ne yapacağız?] Olsun, yine kuralı bulmaya çalışalım…

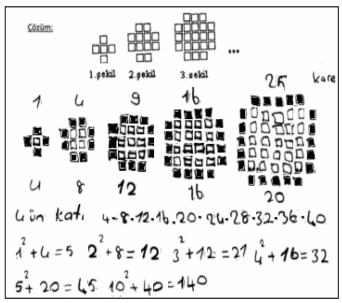
…. *[Öğrenci burada kâğıt üzerine birçok tahmin-deneme-kontrol yapmasına rağmen kuralı bulamamıştır]…*

Ö11-7i ve Ö16-8o öğrencileri ikinci dereceden sayı dizisi ve şekil örüntü problemlerini çözerken, bu çeşit problemlerin çözümünde kullanılan bir formül öğrendiklerini ifade etmişler ve bu formül yardımıyla problemlere cevap verebileceklerini belirtmişlerdir. Öğrenciler yandaki açıklamaları yaparak etkinlik kartlarına yandaki çözümleri yazmışlardır. Ö11-7i öğrencisi şekil örüntü problemini sayı dizisi örüntü problemine dönüştürmüş ve her iki probleminde de sayısal hesaplama teknikleriyle bir kural yapılandırmayı içeren "içeriksel" stratejiyi kullanmıştır. Yandaki çözümde de görüldüğü gibi Ö11-7i öğrencisi genellemesini harfli ifadelerle değil, kelimelerle ifade etmiştir. Benzer şekilde Ö16-8o öğrencisi de daha önceden oluşturmaya aşina olduğu bir kural yardımıyla soruyu çözmeye çalışmış yani "içeriksel" stratejiyi kullanmıştır. Fakat her iki öğrencinin iki değişken olan terim ve terimin yeri arasında bir ilişkilendirme yaparak oluşturduğu formülün sınırları hakkındaki bilgisi kavramsal düzeyde değildir.

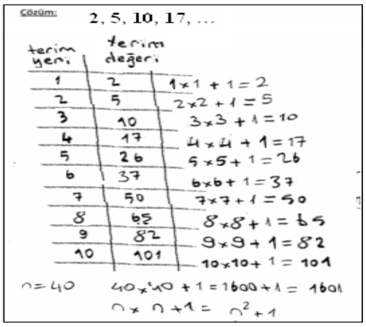


Ö11-7i : …Farklar 3, 5, 7,.. şeklinde gidiyor. Fark eşit olmadığından diğer formülü kullanacağız. [A: Farklı formüller mi var?]…Evet. Farklar eşitse başka formül, eşit değilse başka formül var. Sırasıyla 1'in karesi 1, 2' in karesi 4, 3' ün Karesi 9, 4' ün karesi 16 şeklinde devam eder. [A: Bu sayılar ne işe yarayacak?]Bu sayılara eklendiğinde 2, 5, 10, 17 sayılarını veren sayıyı bulacağız… O halde 1, 4, 9, 16,.. sayılarına 1 eklersek 2, 5, 10, 17,… olur. 5.terim 5, 26, 10.terim 101, 40.terim 1601 olur. [A: Kural ne?]… Her terimin karesinin 1 fazlası olur.

Ö16-8o : Farklar 7, 9, 11, 13,...dür. O halde tam kare sayıları kullanacağız. [A: Niçin tam kare sayılar?] … Farklar eşit olmadığından dolayı kullanacağız. Çünkü formülü öyle öğrettiler… Önce şekil üzerinde 1, 4, 9, 16,… sayılarına karşılık gelen kareleri alalım diğerlerini karalayalım. Karalananlar sırasıyla 4, 8, 12, 16, 20, …şeklinde gidiyor… Bu sayılarda 4' ün katları…. O halde 1'in karesine 4 ekle 5, 2'nin karesine 8 ekle 12, 3' ün karesine 12 ekle 21 olur. Kural böyle devam eder. 5.terim, 45; 10. terim, 140 olur. 40. terimi de aynen buluruz.[A: Kural ne?]… Gerek yok ki hangi sayı istenirse bu kuralla buluruz.



Bununla birlikte Ö12-7i öğrencisi, iki değişken olan terim ile terim değeri arasındaki ilişkiden yararlanarak bir kural oluşturmaya çalışmıştır. Bu öğrenci ikinci dereceden sayı dizisi örüntü problemindeki iki değişken arasındaki ilişkileri tablo yardımıyla göstererek ve "fonksiyonel veya kesin" stratejiden yararlanarak ifade etmiş, örüntünün genel terimini "n2 + 1" şeklinde tanımlamıştır. Ö17-8i ve Ö18-8i öğrencileri de yandaki iki çözümde görüldüğü gibi ikinci dereceden şekil örüntü problemini hem sayısal hem de görsel gösterimlerden yararlanarak ve terim ile terim yeri arasındaki ilişkiyi bularak çözmüşlerdir. Bu öğrenciler de tıpkı Ö12-7i öğrencisi gibi "fonksiyonel veya kesin" strateji yardımıyla genel terimi "n2 + 4.n" şeklinde cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Bu üç öğrenci de terim ile terim yeri arasındaki ilişkiden yararlanarak oluşturduğu kurallar hakkında kavramsal düzeyde bilgiye sahiptirler.



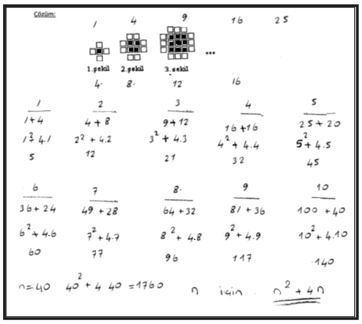
Ö12-7i: Sayı dizisi örüntüsü. İlk önce tablo çizelim ki aradaki ilişkiyi daha rahat görelim. Terim yeri ile terim değeri arasındaki ilişki. Bu ilişkiyi bulursak genellemeyi daha rahat yaparız. Sayılar arasındaki farklar eşit olmadığından terim yerinin karesi kullanılacak. [A: Neden?]… Eğer farklar eşit ise terimin kendisi ile, farklar eşit değilse terimin karesi ile işlem yapılır. O halde 1x1, 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4,… şeklinde giden sayılardan yararlanacağız. Tamam, 1.terimin değeri olan 2 yi nasıl buluruz, bunu düşünelim. Tamam, 1 ile 1 in çarpımına 1 eklersem 2 olur.

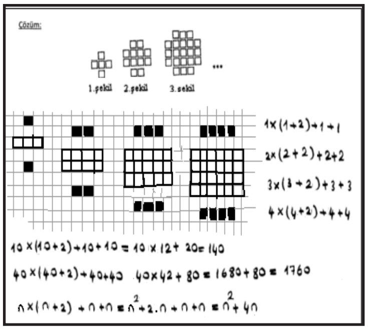
A: Tamam şimdi ne yapacağız?]…

Ö12-7i : Aynı şekilde 2 ile 2 nin çarpımına 2 eklersem 6 olur, o da olmaz. Demek ki eklenecek sayı olan 1 sabit olacak. 1 sayısının terim yeri ile ilgisi yok. O halde çarpılan ilk iki sayı terim yerine göre değişiyor, eklenen 1 sayısı sabit kalıyor. Tamam, kuralı bulduk, "terim yerinin karesine 1 eklenecek". Buna göre 40. terim 1601 olur….

A: Tamam şimdi ne yapacağız?]…

Ö12-7i : O halde kural n çarpı n artı 1, O da n' in karesi artı 1 olur.





Bu bölümde doğrusal sayı dizisi ve şekil örüntü problemlerinden elde edilen veriler sırasıyla öğrencilerin çözüm stratejilerine göre sunulmuştur.

Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejilerini belirlemek için 6-8. sınıf öğrencileriyle yapılan yukarıdaki klinik mülakatlardan elde edilen bulgular, sınıflara ve stratejilere göre sınıflanmış ve aşağıdaki Tablo 5' te sunulmuştur.

Tablo 5.

6-8.Sınıf Öğrencilerinin Doğrusal ve İkinci Dereceden Örüntüleri Genelleştirme Stratejilerine Ait Dağılımları

Sınıflar	Öğrenciler	Stratejiler ve Örüntü Çeşitleri			
		Doğrusal		İkinci Dereceden	
		Sayı Dizisi	Şekil	Sayı Dizisi	Şekil
6.sınıf	Ö1-6z	Orantı	Orantı	-	-
	Ö2-6z	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)	-	-
	Ö3-6o	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)	Parçaları Sayma veya Modelleme
	Ö4-6o	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)
	Ö5-6i	Fark ile Çarpma	Fark ile Çarpma	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)
	Ö6-6i	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)
7.sınıf	Ö7-7z	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)	Parçaları Sayma veya Modelleme
	Ö8-7z	Orantı	Orantı	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)
	Ö9-7o	İçeriksel	İçeriksel	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)
	Ö10-7o	Tahmin ve Kontrol	Tahmin ve Kontrol	Tahmin ve Kontrol	Tahmin ve Kontrol
	Ö11-7i	İçeriksel	İçeriksel	İçeriksel	İçeriksel
	Ö12-7i	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)
8.sınıf	Ö13-8z	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)
	Ö14-8z	Orantı	Orantı	Yinelemeli(Eklemeli)	Parçaları Sayma veya Modelleme
	Ö15-8o	Tahmin ve Kontrol	Tahmin ve Kontrol	Yinelemeli(Eklemeli)	Yinelemeli(Eklemeli)
	Ö16-8o	İçeriksel	İçeriksel	İçeriksel	İçeriksel
	Ö17-8i	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)
	Ö18-8i	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)	Fonksiyonel (Kesin)

Tartışma ve Sonuçlar

Doğrusal ve ikinci dereceden örüntülerinin tümünde 6-8. sınıf öğrencilerinin öğrenim seviyesi arttıkça örüntü genelleştirme stratejilerindeki çeşitlilik, fonksiyonel stratejiyi kullanma ve doğru genellemeye ulaşma yeterlilikleri olumlu yönde gelişmiştir (Tablo 5). Bu gelişimin olumlu yönde oluşu hem öğrencinin bilişsel olgunluğundan hem de matematiksel deneyiminden kaynaklanabilir. 6-8. sınıf öğrencileri tüm problemlerde genel olarak "yinelemeli (eklemeli)" stratejiyi kullanırken, "fonksiyonel (kesin)" stratejiyi kullanan öğrencilerin sayısı oldukça azdır. Doğrusal örüntü problemlerinde beş öğrenci "yinelemeli (eklemeli)" stratejiyi tercih etmişken, ikinci dereceden örüntü problemlerinde on öğrenci bu stratejiyi tercih etmiştir. Bu ise öğrencilerin doğrusal olmayan (ikinci dereceden) örüntü çeşitlerinde bile doğrusal örüntü problemlerine daha uygun olan ardışık terimler arasındaki farkın kullanıldığı "yinelemeli (eklemeli)" stratejiye kaydığını göstermiş, bu ise öğrencilerin genelleştirme yapmadaki başarısızlığını doğurmuştur. Çünkü bu stratejiler doğrusal olmayan (ikinci dereceden) örüntü problemlerinde global genelleştirmelere izin vermez (Amit and Neria, 2008; Krebs, 2003; Orton and Orton, 1999; Rivera, 2007). Bununla birlikte 6. sınıf öğrencileri doğrusal örüntülerde ağırlıklı olarak "yinelemeli (eklemeli)" stratejiyi kullanmışken, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin stratejileri çeşitlilik arz etmektedir. 7 ve 8. sınıf öğrencilerinden üçer öğrenci doğrusal örüntülerde "içeriksel ve fonksiyonel" stratejileri kullanmışken, sadece birer öğrenci "yinelemeli(eklemeli) stratejiyi kullanmıştır. Fakat 6 ve 7. sınıf öğrencilerin çoğu ikinci dereceden sayı dizisi örüntülerinde "yinelemeli (eklemeli)" stratejiyi, ikinci dereceden şekil örüntülerinde ise "yinelemeli (eklemeli) ve parçaları sayma veya modelleme" stratejileri kullanmışlardır. 8. sınıf öğrencilerinin yarısı ise "fonksiyonel ve içeriksel" stratejiyi kullanmıştır. 6-8. sınıf öğrencilerinin çoğunluğu şekil örüntülerini genelleştirmeye çalışırken şekil örüntülerini sayı dizisi örüntülerine dönüştürmede ısrarcı olmuşlardır. Ayrıca öğrenciler genel olarak dört örüntü problemini de aynı çözüm stratejileri ile çözmeye çalışmışken, 7 ile 8. sınıf öğrencilerinin bazıları- Ö8$_{-7z}$, Ö9$_{-7o}$, Ö14$_{-8z}$, Ö15$_{-8o}$- problemler değiştikçe çözüm stratejilerini de değiştirmişlerdir. Özellikle öğrenim seviyesi arttıkça "yinelemeli, parçaları sayma ve modelleme, orantı, fark ile çarpma, tahmin ve kontrol" stratejilerinden, genelleştirmeye ulaşmada daha etkili olan "içeriksel ve fonksiyonel (kesin)" stratejilere olan geçiş az da olsa gerçekleşmiştir. Tüm öğrenim seviyelerinde "yinelemeli, parçaları sayma ve modelleme, orantı, fark ile çarpma, tahmin ve kontrol" stratejilerinden yararlanan öğrenciler, örüntülerin kuralını keşfetmede ve genellemede yetersiz kalmışlardır. Örneğin Ö1$_{-6z}$, Ö8$_{-7z}$ ve Ö14$_{-8z}$ öğrencileri doğrusal örüntü problemlerinin her ikisinde de "orantı" stratejisini kullanmışken, ikinci dereceden örüntü problemlerinde sabit bir oran bulamadıklarından "orantı" stratejisini kullanamamışlardır. Bu öğrenciler sadece, bazı özel örüntü problemleri için geçerli olan bu stratejiden dolayı yanlış genellemelere ulaşmış ve genel olarak yerel genelleştirmeleri yapabilmişlerdir. Ayrıca öğrenciler genellikle şekil örüntü problemlerini sayı dizisi örüntü problemlerine dönüştürme eğilimindedirler. Fakat karmaşık problemlerin ve özelliklede ikinci dereceden örüntü problemlerinin çözümlerinde görsel yaklaşımlar probleme girişte ve daha sonraki süreçteki bilgiyi organize etmede öğrencilere yardım eder (Krebs, 2003; Rivera, 2007). Bununla birlikte Ö6$_{-6i}$, Ö11$_{-7i}$, Ö12$_{-7i}$, Ö16$_{-8o}$, Ö17$_{-8i}$ ve Ö18$_{-8i}$ öğrencileri her iki problemde de terim ve terim yeri arasındaki ilişkilere odaklanmış ve "içeriksel ve fonksiyonel" stratejilerden yararlanmışlardır. Bu öğrencilerden Ö6$_{-6i}$, Ö11$_{-7i}$ ve Ö16$_{-8o}$ öğrencileri kuralı sözlü ve yazılı olarak ifade etmiş, fakat kuralı cebirsel olarak ifade edememişlerdir. Bu öğrenciler genelde bilinen sayısal bir değer yerine harfli sembolleri içeren ve daha önceden oluşturmaya alışık oldukları bir formül yardımıyla problemleri çözmeye çalışmışlardır. Bu öğrencilerin oluşturdukları formüllerin sınırları hakkındaki bilgisi kavramsal düzeyde olmamakla birlikte, öğrencilerin çoğu, bulmuş oldukları formüllerin doğruluğunu araştırmamışlardır.

Farklı öğrenim seviyesindeki öğrenciler doğrusal örüntüleri genelleştirmede ikinci dereceden örüntülere göre, sayı dizisi örüntülerini genelleştirmede ise, şekil örüntülerine göre daha başarılı olmuşlardır. Bu iki farkın, öğrenme ortamlarında öğretmenlerin daha çok doğrusal örüntü ve sayı dizisi örüntü problemlerine ağırlık vermelerinden kaynaklandığı düşünülebilir. Birçok araştırmacı, öğrencilerin aşina oldukları örüntü problemlerinde daha başarılı olduğunu belirtmiştir (Feifei, 2005; Lannin, 2005; Orton and Orton, 1999).

Ayrıca 6-8. sınıf öğrencilerinden bazıları, yakın ve uzak terimleri ya art arda sayıları yazarak ya da terimler arasındaki farkı bulup bir önceki terime ekleyerek elde etmeye çalıştığından, bu ***öğrenciler*** yakın terimi bulmada uzak terimi bulmaya göre daha başarılı olmuşlardır. NCTM (2000) "ilköğretim öğrencileri uzak örüntülerin uzak terimlerini cebirsel düşünmeye temel oluşturduğundan bulabilmeli" teklifi göz önüne alındığında, araştırma verileri öğrencilerin uzak terimlerde yetersiz olduğunu göstermiştir. Bu sonuç Stacey (1989), Zazkis ve Liljedahl (2002) ve Ley(2005) 'in çalışmalarıyla da paralellik göstermektedir.

6 ve 7. sınıf öğrencilerinin çoğu örüntülerin kurallarını sözlü olarak veya cümlelerle ifade etme eğiliminde iken, 8. sınıf öğrencileri daha çok harf sembollerini kullanmışlardır. Bu da öğrenim seviyesi arttıkça kuralı harflerle veya cebirsel olarak ifade eden öğrencilerin sayısının arttığını gösteren bir sonuçtur. English ve Warren (1998), daha düşük öğrenim seviyelerindeki

öğrencilerin aritmetik özellikleri daha fazla göstermelerinden dolayı örüntünün kuralını sözlü olarak ifade etme eğiliminde olduklarını ifade etmiştir.

Özellikle 7 ve 8. sınıf öğrencilerinden Ö10$_{-7o}$, Ö12$_{-7i}$, Ö15$_{-8o}$ ve Ö17$_{-8i}$ öğrencileri örüntü genelleme problemlerinin çözümlerinde çizelge veya tablo gösterimlerini, problemleri organize etmede ve genelleme yapmada etkili bir araç olarak kullanmışlardır. Bu öğrenciler genel olarak çizelgenin bir satırına terim yerini diğer satırına ise terim sayısını yazarak ve bu iki değişken arasındaki ilişkiyi dikkate alarak genellemelere ulaşmaya çalışmışlardır. Nitekim Swafford ve Langrall (2000), tablo kullanımının bir problemin çözümünde, çözücüye yardım edeceğini belirtmiş ve tablo kullanımının daha genel bir bakış sağlayacağını ifade etmiştir.

Ayrıca farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin bazılarının örüntü durumlarını genellemede hatalara sahip oldukları belirlenmiştir: Şekil örüntülerinde sadece şekil çizimine yoğunlaşma ve şekillerin sayısı ile adım sayısı ilişkisini düşünmeme, örüntünün kuralını iki terim arasındaki fark olarak algılama ve bunun sonucu olarak yanlış genellemeye ulaşma, sadece aradaki farkın eşit olduğu örüntü çeşitlerinin varlığına inanma, harflerin değerlerini alfabedeki pozisyonlarına göre algılamadan dolayı, n. terim için "n" karşılık gelen konumun sayısal değerini alma. En son sonuç, MacGregor ve Stacey (1997)'in çalışmasını destekler niteliktedir.

Öneriler

Son yıllarda ilköğretim matematik öğretim programlarında, örüntüleri ve ilişkileri tanımlama ve genelleştirmenin önemi gittikçe artmaktadır. Bu kadar merkezi bir konu olan örüntü genelleştirme, sadece aritmetikten cebir'e geçişin değil, aynı zamanda cebirsel düşünmenin de önemli göstergelerinden biridir. Çalışma sonucunda 6-8. sınıf öğrencilerinin çoğunluğunun doğru genellemelere ulaşmada yetersiz oldukları tespit edilmiştir. O halde öğretmenlerin farklı örüntü genelleştirme stratejilerine önem vermesi, özellikle de terim ile terim yeri arasındaki ilişkiyi ifade eden "fonksiyonel (kesin)" stratejinin mantığını kavramsal anlamda öğrencilere kavratması gerekmektedir. Çünkü örüntüleri genelleştirme, erken yaşlardaki öğrencilerin cebirsel düşünme yeteneklerini geliştirmektedir. Örüntü genellemelerini harf ile ifade etme, bir anda ya da zaman içinde kendi kendine geliştirilebilecek bir beceri değildir. Alt sınıf seviyelerinden itibaren öğrencilerin sayı ve şekil örüntülerindeki ilişkileri ve gerçek yaşam durumlarını genellemeyi gerektiren etkinliklerle meşgul olması gerekmektedir. Ayrıca bu çalışmada farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin çoğu, sayı dizisi örüntüsü ile ilgili genelleme problemlerini çözmede şekil formatlarında sunulan problem durumlarına göre daha başarılı olmuşlardır. Bu nedenle öğretmenlerin farklı örüntü problemlerine yer vermesi ve farklı çözüm stratejilerini tanımlaması, öğrencilerin daha sonraki cebir öğrenimi için önemlidir.

Kaynakça

Akkan, Y., Çakıroğlu, Ü., Güven, B. & Karataş, İ. (13-15 Kasım 2008). İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Farklı Formatlardaki Örüntü Çeşitlerine Ait Yeterliliklerinin Karşılaştırılması. *VII. Matematik Sempozyumunda sunulmuş bildiri*, İzmir.

Amit, M. & Neria, D. (2008). Rising to the challenge: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, 40, 111-129.

Armstrong, B. E. (1995). Teaching patterns, relationships and multiplication as worthwhile mathematical tasks. *Teaching Children Mathematics*, 1, 446-450.

Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Harf Eğitim Yayıncılığı, Ankara.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra.* London: Kluwer Academic Publisher.

Bishop, J. W. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal*,12(2), 107-126.

Carpenter, T. P.& Levi, L. (2000). Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Ebersbach, M. & Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about nonlinear growth. *Children Development*, 78, 296-308.

English, L., D. & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher,* 912, 166–170.

Feifei, Y. (2005). "Diagnostic Assessment of Urban Middle School Student Learning of Pre-algebra Patterns". Doctoral Dissertation, Ohio State University, USA.

Garcia-Cruz, J. A. & Martinon, A. (1997). Actions and Invariant Schemata in Linear Generalizing Problems. In E. Pehkonen (Ed.*) Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 289-296). University of Helsinki.

Healy, L. & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 59–84.

Kenney, P. A. & Silver, E. A. (1997). Probing the foundations of algebra: Grade 4 pattern items in NAEP. *Teaching Children Mathematics,* 3, 268-274.

Krebs, A. S. (2003). Middle grade students' algebraic understanding in a reform curriculum. *School Science and Mathematics*, 103, 233-243.

Lannin, J. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(7), 342-348.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18 (3), 3-28.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities*. Mathematical Thinking and Learning*, 73(7), 231-258.

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. In N. Bednarz, C. Kieran and Lee, L. (Ed.) *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 87-106), Kluwer Academic Publishers.

Ley, A., F. (2005). "A Cross- Sectional Investigation of Elementary School Students' Ability to Work with Linear Generalizing Patterns: The Impact of Format and Age on Accuracy and Atrategy Shoice". Master Dissertation,Toronto University, Canada.

Macgregor, M. & Stacey, K. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher,* 90(2), 110-113.

Mason, J., Johnston-Wilder, S. & Graham, A. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Sage (Paul Chapman).

MEB, TTKB. (2006). *Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı ve K*ılavuzu (ss.7,101) . Ankara: MEB Basımevi.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA:NCTM.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In A. Orton (Ed.) *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104–120). Cassell, London.

Rivera, F. & Becker, J. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in Algebra. *In Mathematics Teaching in the Middle* School, 11(4),198-203.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher*, 101(1), 69-75.

Schliemann, A. D., Carraher, D., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S. & Peled, I. (2003). Algebra in Elementary School. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Ed.) *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (pp. 127-134).YAYIN YERİ

Smith, E. (2003). Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra Throughout the K-12 Curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Ed.) *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147–164.

Steele, D. & Johanning D. I. (2004). A schematic–theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 65–90.

Swafford, J. O. & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' pre-instructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89–112.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. D. Grouws(Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-514). Macmillan Publishing Company, Newyork.

Zaskıs, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (4), 429-439.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.